

# TRIANGULATION MINIMALE DE CUBES

JEAN-PHILIPPE BURELLE

RÉSUMÉ. Une manière combinatoire d'étudier les triangulations de cubes  $n$ -dimensionnels est donnée, ainsi que des outils pour optimiser le nombre de simplexes utilisés dans une telle triangulation. On donne ensuite un exemple concret en démontrant la minimalité d'une triangulation du 3-cube.

## 0. Introduction

Les triangulations, en plus d'avoir un intérêt intrinsèque, sont utiles dans plusieurs domaines. Entre autres, elles sont utilisées pour discrétiser des problèmes complexes lorsqu'il n'y a pas de solutions dans le cas continu. Par exemple, on utilise des triangulations pour approximer des surfaces en imagerie numérique. Les triangulations de cubes de dimensions supérieures peuvent être utilisées dans des algorithmes qui servent à trouver des points fixes d'applications, et plus la triangulation est petite, plus l'algorithme sera rapide, d'où l'intérêt de trouver des triangulations minimales [2].

Puisque étudier les triangulations du cube en considérant ses propriétés géométriques devient vite compliqué en dimensions supérieures à trois, on règle le problème en considérant le cube comme un objet combinatoire et en définissant les triangulations de manière complètement combinatoire. Cette définition est extraite de plusieurs travaux sur les triangulations mais entre autres [3]. Un  $d$ -cube sera donc représenté par l'ensemble de ses sommets, arêtes et faces. Il peut aussi être vu comme l'enveloppe convexe de ses sommets  $\text{conv}(\{0, 1\}^d)$ .

On parle de définitions d'abord pour avoir un langage dans lequel parler de triangulations, puis d'une technique pour passer d'une triangulation à une autre facilement, et finalement d'une application de cette technique pour trouver une triangulation minimale du cube en trois dimensions.

## 1. Préliminaire

Une triangulation en deux dimensions est la séparation d'une figure en triangles. Si l'on veut généraliser le concept aux dimensions supérieures, nous devons d'abord généraliser l'idée de triangle et de tétraèdre.

**Définition :** L'enveloppe convexe d'un ensemble de points  $P$ , notée  $\text{conv}(P)$ , est le plus petit ensemble convexe contenant  $P$  (Fig. 1).

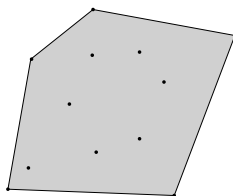


FIGURE 1. L'enveloppe convexe d'un ensemble de points

**Définition :** Un ensemble de points  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  est dit *affinement indépendant* si son enveloppe convexe est  $(n - 1)$ -dimensionnelle.

**Définition :** Un  $n$ -simplexe est l'enveloppe convexe de  $n + 1$  points affinement indépendants dans un espace euclidien de dimension  $n$  ou plus.

Par exemple, l'enveloppe convexe de trois points affinement indépendants est un triangle, et celle de quatre points qui ne sont pas dans le même plan est un tétraèdre. La définition suivante est une version combinatoire de la définition usuelle d'une face de polytope.

**Définition :** Une *face*  $n$ -dimensionnelle d'un ensemble de points  $P$  est un sous-ensemble de  $P$  qui optimise une équation linéaire.

Nous avons maintenant réuni toutes les définitions nécessaires pour définir une triangulation d'un ensemble de points.

**Définition :** Une *triangulation* d'un ensemble fini de points  $P$  est une collection de simplexes  $S$  qui respecte les deux propriétés suivantes :

- (1)  $\bigcup_{\sigma_i \in S} \sigma_i = \text{conv}(P)$ .  
(L'union de tous des simplexes doit être le polytope complet.)
- (2) L'intersection de deux simplexes doit être une face des deux ou l'ensemble vide.

## 2. Flips

Un outil très pratique pour construire des petites triangulations est l'opération de *flip*. Intuitivement, un flip correspond à un mouvement minimal entre deux triangulations. En deux dimensions, il s'agit la plupart du temps de prendre un quadrilatère et de changer la diagonale le séparant en deux pour l'autre (Fig. 2).

En dimensions supérieures par contre, il existe une généralisation de cette notion, et plus on augmente de dimension, plus les flips sont variés et peuvent changer le nombre de simplexes dans une triangulation.

La définition de flip la plus pratique pour identifier les flips possibles dans un polytope, donnée dans [5] mais originalement formulée par Gel'fand, Kapranov et Zelevinsky [4], est celle qui utilise les *circuits*.

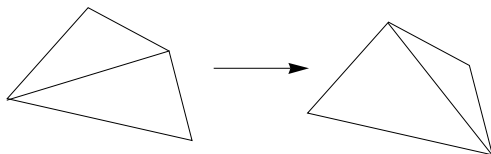


FIGURE 2. Un exemple de flip en 2 dimensions

**Définition :** Un *circuit*  $C$  est un sous-ensemble affinement dépendant *minimal* d'un ensemble de points  $P$ , c'est à dire que tous ses sous-ensembles propres sont affinement indépendants.

Par exemple, trois points sur une droite ou cinq points dans l'espace tridimensionnel forment des circuits.

**Proposition :** Il existe une équation de dépendance unique (à une constante près) pour un circuit  $C = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , satisfaisant les relations suivantes :

$$(1) \quad \begin{aligned} \sum \lambda_i x_i &= 0 \\ \sum \lambda_i &= 0. \end{aligned}$$

PREUVE. *Supposons au contraire qu'il en existe deux, alors*

$$\sum \lambda_i x_i = 0 \quad \sum \mu_i x_i = 0.$$

*Nous savons que les  $\lambda_i$  et  $\mu_i$  sont tous non-nuls, car sinon il existerait un circuit plus petit. Ceci implique*

$$\begin{aligned} \sum_{i>1} \lambda_i x_i &= -\lambda_1 x_1 & \sum_{i>1} \mu_i x_i &= -\mu_1 x_1 \\ \sum_{i>1} \frac{\lambda_i x_i}{\lambda_1} &= -x_1 & \sum_{i>1} \frac{\mu_i x_i}{\mu_1} &= -x_1. \end{aligned}$$

*Il s'ensuit que*

$$\sum_{i>1} \frac{\lambda_i x_i}{\lambda_1} = \sum_{i>1} \frac{\mu_i x_i}{\mu_1}.$$

*Donc*

$$\sum_{i>1} \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} - \frac{\mu_i}{\mu_1} \right) x_i = 0.$$

*Ceci est une contradiction à la minimalité des deux circuits car nous avons trouvé un ensemble dépendant plus petit que les deux précédents (il n'utilise pas le point  $x_1$ ).*

La propriété de Radon sur les circuits [5] permet de diviser le circuit en deux triangulations différentes. Cette propriété dit que la subdivision suivante du circuit en deux ensembles est la seule telle que l'intersection des enveloppes convexes est non-vidée. (Fig. 3) Les  $\lambda_i$  sont ceux de l'équation (1).

$$C_+ = \{x_i \in C \mid \lambda_i < 0\}$$

$$C_- = \{x_i \in C \mid \lambda_i > 0\}.$$

L'intersection des enveloppes est au point

$$\sum_{x_i \in C_+} \lambda_i x_i = \sum_{x_i \in C_-} -\lambda_i x_i.$$

Pour que cette relation soit une combinaison convexe, on doit normaliser les coefficients  $\lambda_i$  de sorte que  $\sum_{x_i \in C_+} \lambda_i = \sum_{x_i \in C_-} -\lambda_i = 1$ , mais ceci est faisable en divisant par une constante.

L'égalité est facile à voir en regardant l'équation (1).

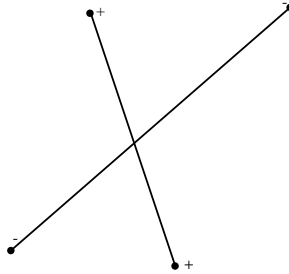


FIGURE 3. La propriété de Radon

Puisque cette subdivision est la seule telle que l'intersection des enveloppes convexes est non-vidée, si l'on choisit un des deux ensembles de la subdivision, disons  $C_+$ , et que l'on s'assure de ne jamais prendre tous les points de  $C_+$  dans un des simplexes d'une triangulation donnée, on aura bel et bien une triangulation puisqu'on n'aura pas le point où les enveloppes convexes de  $C_+$  et de  $C_-$  s'intersectent.

On peut donc subdiviser le circuit en deux triangulations données par :

$$T_- = \{C \setminus x_i \mid \lambda_i < 0\}.$$

$$T_+ = \{C \setminus x_i \mid \lambda_i > 0\}.$$

C'est-à-dire que pour la première triangulation, on enlève un à un les points qui ont un coefficient négatif et on prend les simplexes résultants, et pour la deuxième on fait la même chose avec les points qui ont un coefficient positif. On obtient donc la définition suivante pour un flip :

**Définition :** Soit  $\mathcal{T}_1$  une triangulation d'un ensemble de points  $A$ , supposons que  $T_+ \subseteq \mathcal{T}_1$  où  $T_+$  est la triangulation associée au circuit  $C \subseteq A$  décrite plus haut. On dit que  $\mathcal{T}_2$  est obtenue de  $\mathcal{T}_1$  par un *flip* si :

$$\mathcal{T}_2 = (\mathcal{T}_1 \setminus \{\sigma_i \in T_+\}) \cup \{\sigma_i \in T_-\}$$

### 3. Applications des flips

Dans le 3-cube, il existe quatre classes d'isométrie de simplexes (Fig. 4) [1].

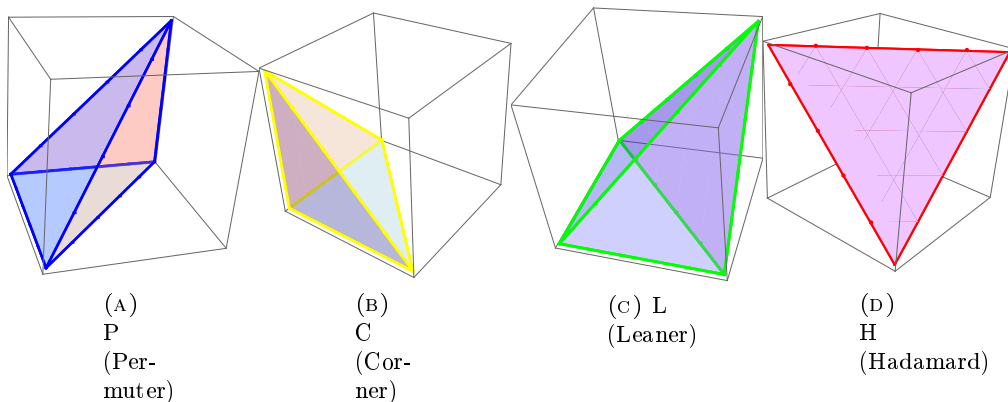


FIGURE 4. Classes d'isométrie des simplexes du 3-cube

Il existe deux flips possibles parmi ces classes. (Fig. 5 et 6)

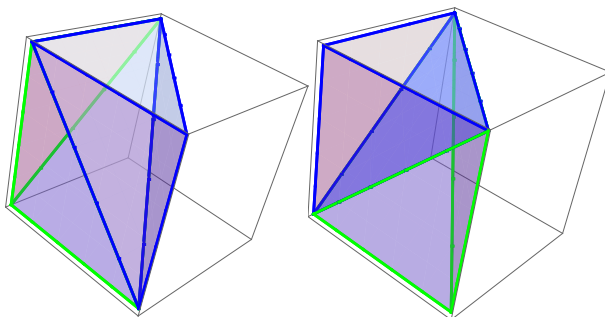


FIGURE 5. Deux permuters deviennent un corner et un leaner :  
 $2P = L+C$

En les utilisant on réussit à diminuer la taille de la triangulation triviale (six simplexes de classe P) à cinq simplexes. Voici comment on procède, en notant de manière additive les flips entre les simplexes :

$$\begin{aligned}
 6P &= 3C + 3L \\
 &= 3C + H + C \\
 &= 4C + H.
 \end{aligned}$$

**Théorème :** Le nombre minimal de simplexes dans une triangulation du 3-cube est 5.

PREUVE. Pour calculer le  $d$ -volume d'un simplexe, on utilise la formule

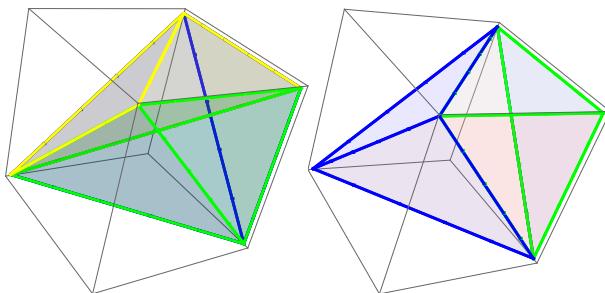


FIGURE 6. Trois leaners deviennent un corner et un hadamard :  
 $3L = C+H$

$$\text{vol}(\sigma) = \frac{|\det(1|A)|}{d!}.$$

où  $A$  est la matrice dont les lignes sont les coordonnées des sommets du simplexe. La notation  $(1|A)$  signifie qu'on augmente la matrice d'une colonne de 1 et  $d$  est la dimension du simplexe. En dimension trois, les Leaners, Corners et Permuters ont tous un volume de  $1/6$ . Les Hadamards ont un volume de  $1/3$ . Il est évident que pour recouvrir le cube, il faut que la somme des volumes des simplexes soit égale au volume du cube, c'est à dire, à 1. Il faut également que chacune des arêtes du cube soit recouverte par une arête de simplexe. Comme les Hadamards ne recouvrent aucune arête du cube, et que les simplexes de volume  $1/6$  recouvrent au maximum 3 arêtes chacuns, il faut au moins 4 simplexes de volume  $1/6$  pour recouvrir les 12 arêtes du cube. Cela fait un volume total de  $2/3$  avec 4 simplexes, et pour finir de recouvrir le volume total on doit utiliser un Hadamard de volume  $1/3$ . C'est pourquoi on ne peut faire une triangulation utilisant moins de 5 simplexes pour le 3-cube.

En dimensions quatre et cinq, il existe également une série de flips qui mènent à la triangulation minimale à partir de la triangulation en  $d!$  simplexes. [1]

## Références

- [1] Adam Bliss. Covering numbers of the cubes, 2003.
- [2] Adam Bliss and Francis Edward Su. Lower bounds for simplicial covers and triangulations of cubes. *Discrete Comput. Geom.*, 33(4) :669–686, 2005.
- [3] Jesus A. De Loera, Jörg Rambeau, and Francisco L. Santos. Triangulations : Structures and algorithms (à paraître).
- [4] I.M. Gel'fand, M.M. Kapranov, and A.V. Zelevinsky. Discriminants, resultants and multi-dimensional determinants. 1994.
- [5] Francisco Santos. Geometric bistellar flips. the setting, the context and a construction, 2006.

JEAN-PHILIPPE BURELLE, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Courriel: jean-philippe.burelle@usherbrooke.ca