

ANALYSE ET COMPARAISON DE PROCÉDURES D’OPTIMISATION EN TOMODENSITOMÉTRIE

MAXIME TOUSSAINT ET CHRISTIAN THIBAudeau

RÉSUMÉ. La est une modalité d’imagerie médicale utilisée pour représenter la structure interne d’un être vivant. La reconstruction de cette image doit être rapide et stable. En outre, le résultat doit représenter le plus fidèlement que possible la réalité. Ce document propose de comparer les performances de quelques algorithmes itératifs en termes de qualité d’image reconstruite et de durée de calcul. Parmi les algorithmes testés, certains ont été développés spécialement pour le problème de tomodensitométrie alors que d’autres sont des solveurs généraux. De plus, chacun des algorithmes sera testé avec une variante incluant un terme de régularisation. Ce document propose de tester quelques variantes de gradient conjugué non-linéaire afin d’observer leur performance en tomodensitométrie.

1. Introduction

La tomodensitométrie est une procédure qui consiste à exploiter le taux d’absorption de rayons-x des tissus pour représenter la structure interne d’un être vivant. Ce procédé se divise en trois étapes, soit l’acquisition, le traitement des données et la reconstruction. Ce document se concentrera sur cette dernière étape dans le cas particulier d’une géométrie d’acquisition en seulement 2 dimensions.

Dans la littérature, deux familles de méthodes sont souvent reliées à la tomodensitométrie. Les méthodes analytiques qui reposent sur l’inverse de la transformée de Radon et les itératives qui optimisent des modèles correspondant au problème. Ces deux procédés sont possibles grâce à un théorème démontré par M. Johann Radon en 1917 [RP86].

Théorème de projection de Radon : Si la totalité des projections d’un objet est disponible et que ces dernières sont acquises selon des droites concourantes, il est alors possible de reconstruire la fonction réelle à deux variables (position spatiale en x et en y) représentant cet objet.

Cet article provient d’un travail qui a été financé par une bourse offerte par la Faculté de médecine et des sciences de la santé de l’Université de Sherbrooke (FMSS), les Instituts de recherche en santé du Canada (IRSC) et le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG). Les auteurs tiennent à remercier M. Roger Lecomte pour leur avoir permis de travailler sur ce projet et M. Jean-pierre Dussault pour les commentaires et les discussions qui ont motivé l’ajout des SG. Leur critique ont permis d’améliorer la rédaction de ce rapport technique.

En pratique, il est impossible d'obtenir toutes les projections. Toutefois, un sous-échantillon judicieusement choisi permet d'acquérir suffisamment de données pour conserver l'idée du théorème. De plus, les limitations des ressources informatiques ne permettent pas de représenter l'objet dans sa forme continue. La discrétisation en voxels permet de pallier à cette lacune. Pour plus d'informations concernant l'acquisition et le traitement des données, le lecteur est invité à consulter [KS88] et [H80].

Deux caractéristiques importantes en tomodensitométrie différencient les algorithmes analytiques de ceux dits itératifs : la durée de reconstruction et la flexibilité de la méthode. Pour se représenter la différence, il faut comprendre leur fonctionnement. La reconstruction par calcul analytique consiste à appliquer la fonction inverse sur les résultats obtenus. L'idée de base veut que la méthode d'acquisition des données puisse être représentée par une fonction qui, en utilisant le théorème de projection de Radon, admet une inverse. Le principe clé des algorithmes itératifs est de représenter la problématique sous forme d'un problème d'optimisation et de chercher, à chaque étape, une solution qui se rapproche de la vérité. Il s'agit ensuite d'arrêter lorsque cette solution est jugée satisfaisante.

Pour comparer la vitesse de reconstruction des familles d'algorithmes, il faut introduire l'élément le plus coûteux à manipuler, soit la matrice système. Cette matrice permet de relier les données acquises à la version discrète de l'objet. Elle devient rapidement imposante puisque sa forme explicite est composée de $N_p \times N_d \times N_v$ éléments (où N_p représente le nombre de projections, N_d le nombre de détecteurs et N_v le nombre de voxels). Ainsi, la vitesse de reconstruction des méthodes dépendra largement de la taille de cette matrice et du nombre de fois qu'elle doit être utilisée. La méthode analytique demande l'application d'une formule, soit l'inverse de la fonction de Radon, ce qui consiste à n'utiliser qu'une seule fois la matrice système pour approximer l'objet. Une méthode itérative demande l'application de cette matrice au minimum une fois par itération. Donc, une méthode itérative demande beaucoup plus de calcul qu'une méthode analytique.

Toutefois, les algorithmes itératifs sont connus pour être plus flexibles que les algorithmes analytiques. D'une part, il est possible d'inclure dans ces premiers la mathématique liée à la physique du processus d'acquisition. Par exemple, la nature poissonnienne du comptage de photons. D'un autre côté, alors que les algorithmes analytiques doivent travailler avec des données spatialement équidistribuées (et souvent uniquement en géométrie parallèle), les méthodes itératives ne souffrent d'aucunes limitations de ce type. En modélisant correctement la géométrie du système d'acquisition, par le biais de la matrice système, toutes les configurations possibles de scanners peuvent être utilisées pour produire des images sans ré-interpolation des données. Les algorithmes itératifs sont principalement composés de deux éléments. D'abord, il faut un modèle qui se comporte bien, c'est-à-dire continu et dérivable, et dont l'image recherchée correspond à la solution optimale. Puis, il faut une méthode d'optimisation qui converge vers la solution désirée. Les détails seront expliqués dans la section suivante.

Le but de ce document est de comparer les performances de différentes méthodes itératives. Afin d'offrir une vue d'ensemble sur les méthodes disponibles en tomodensitométrie, des algorithmes reconnus dans le domaine ont été employées

ainsi que des variantes de deux solveurs généraux qui semblent prometteuses. Ainsi, la liste est composée de méthodes développées uniquement pour résoudre des problèmes de tomographie et de solveurs généraux. Il est à noter que dans ce travail, ces deux groupes sont respectivement nommés APT¹ et SG². De plus, chacun des algorithmes sera testé avec et sans un terme de régularisation, ce qui permettra de comparer leurs performances. Pour finir, les expériences incluent un APT qui se sert de sous-groupes ordonnés, une reconnue dans la littérature pour sa rapidité de convergence.

Dans ce court rapport, les algorithmes testés dans les expériences seront d'abord présentés. Ensuite, les mires utilisées dans les simulations seront décrites. Suivra la description de la méthodologie appliquée pour effectuer les tests et les comparaisons. Les résultats, appuyés par des graphiques, viendront illustrer les performances des algorithmes. Finalement, le document va clore sur l'évaluation des performances.

Cet article est une version condensé du rapport de recherche [TTL11]. La version complète inclut la description et la motivation des algorithmes, le code des mires, les majorations, où une fonction $F(x)$ majore $G(x)$ lorsque pour tout x , $F(x) \geq G(x)$, utilisées et quelques ouvertures dans ce domaine.

2. Algorithmes utilisés

Les algorithmes utilisés dans ce travail sont résumés dans le tableau ci-dessous et la notation utilisée dans cet article est présentée à la section 6.1.

Notez que le code de L-BFGS-B utilisé se retrouve dans le lien suivant :

http://blake.bcm.edu/eman2/doxygen_html/lbfgsb_8cpp_source.html, que la notation GC fait référence au gradient conjugué non-linéaire et que P&R et H&Z font respectivement référence à Polak & Ribière et Hager & Zhang.

Notation	Nom usuel	Référence
Conv	Convexe	Voir [LF95]
Gradient	Gradient avec longueur admissible d'Armijo	
trml	Espérance-maximisation	
Conv_os	Convexe avec 10 OS	Voir [KB05]
GC	GC avec le Bêta de P&R sur $-L(\mu)$	Voir [HZ05]
GC_HZ	GC avec le Bêta de H&Z sur $-L(\mu)$	
GC_HZ*	GC avec le Bêta de H&Z sur $G(\mu)$	
GC*	GC avec le Bêta de P&R sur $G(\mu)$	
L-BFGS-B	L-BFGS-B où la fonction objectif est $-L(\mu)$	Code
L-BFGS-B*	L-BFGS-B où la fonction objectif est $G(\mu)$	de EMAN2

Fonction objectif :

$$L(\mu) = \sum_{i=1} \{-d_i e^{-\langle l_i, \mu \rangle} - Y_i \langle l_i, \mu \rangle\}; G(\mu) = \frac{1}{2} \|\tilde{Y} - l\mu\|_{\Sigma}^2; \Sigma = \text{diag}\{\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_J\};$$

1. APT : Algorithmes Produits pour la Tomodensitométrie

2. SG : Solveurs généraux

où $L(\mu)$ est la log-vraisemblance de la solution courante selon le sinogramme, voir [LC84], et $G(\mu)$, présenté dans [SB93], est une approximation quadratique de $L(\mu)$.

Fonction de pénalisation :

Le but de cette fonction est de favoriser les solutions formées de zone uniforme. Le gamma contrôle la force globale tandis que l'épsilon contrôle le point critique où la fonction $\phi(\mu)$ passe de quadratique à linéaire.

Formule :

$$\Psi(\mu) = \gamma \left(\sum_j^J \sum_k^{K_j} \kappa_j \kappa_k w_{jk} \phi(\mu_j - \mu_k) \right); \quad \phi(\mu) = \sqrt{\epsilon + x^2};$$

$$\kappa_j(\mu) = \sqrt{\sum_j l_{ij}^2 Y_i / \sum_j l_{ij}^2};$$

Dans ce travail, l'épsilon a été choisi de sorte à ce que $\phi'(x_{critique}) = \eta$. Soit

$$\epsilon = \left(\frac{x_{critique}}{\eta} \right)^2 (1 - \eta)^2;$$

Les quatre premiers algorithmes sont modifiés tel présenté en [LF95] lors de l'ajout d'un terme de pénalisation. Pour les autres, il suffit d'ajouter $\Psi(\mu)$ à la fonction objectif.

Fonction barrière :

L'algorithme du gradient conjugué non linéaire ne tient pas compte, dans sa définition, des contraintes. Une des méthodes pour palier à ce problème est d'ajouter une fonction barrière à la fonction objectif. Pour plus d'information, consultez [D95]. La fonction utilisée est $\rho \sum_j \ln(\mu_j)$. L'algorithme utilisé pour calculer la longueur admissible est explicité dans [CMI09]. Cet algorithme demande une majoration de la courbure et un ρ_0 qui représente la force de la barrière et qui est diminué lorsque la solution du problème courant est atteinte.

Majoration utilisée : Les étapes sont explicitées en [TTLD11]. *dir* est la direction courante de l'algorithme.

$$-L(\mu) : \sum_{i|dir_i \geq 0} [\langle l_i, dir_i \rangle^2 e^{-\langle l_i, \mu \rangle}] + \sum_{i|dir_i < 0} [\langle l_i, dir_i \rangle^2 e^{-\langle l_i, \mu \rangle} e^{-\bar{\alpha} \langle l_i, dir_i \rangle}];$$

$$G(\mu) : \sum_i [\langle l_i, dir_i \rangle^2 Y_i]; \quad \Psi(\mu) : \gamma \left(\sum_j^J \sum_k^{K_j} \kappa_j \kappa_k w_{jk} \frac{(dir_k - dir_{k_j})^2}{(\epsilon)^{0.5}} \right);$$

Ordered Subset (OS) : Le principe est de séparer les projections en quelques groupes et de mettre à jour, à chaque itération, la solution avec chacun des sous-groupes. L'algorithme est très rapide puisque le problème est divisé en morceaux, mais il tourne autour de la solution optimale, puisqu'il converge vers les solutions individuelles des sous-problèmes.

3. Description des images tests utilisées

Afin de comparer les performances des algorithmes dans différentes situations, les données vont être simulées à partir de 4 objets synthétiques. Les mires ont été produites par CTSim³ et les sinogrammes ont été créés par simulation à l'aide du programme SpectroSin développé par M. Christian Thibaudeau. La simulation a été produite dans quatre conditions différentes. Soit 100, 1 000 et 10 000 photons incidents par projection en ajoutant un bruit de nature Poissonienne⁴ et une version sans bruit.

Pour faciliter et uniformiser l'évaluation des critères de comparaison, les objets ont été construits avec quelques propriétés. Tout d'abord, les objets peuvent tous être insérés dans un plan de 20 par 20 cm. Le calcul de certains des critères de comparaison utilisés dans ce projet exige une zone uniforme, notée A , et une mince ligne, notée B , avec un coefficient d'atténuation élevé. Voir la section 6.2 pour observer leur position dans les mires. Les valeurs des coefficients d'atténuation des mires ont été ajustées afin que la zone qui inclut A ait la même amplitude dans les quatre mires. Les mires sont affichées à la sections 6.4.

Shepp-Logan : La mire du Shepp-logan, dont la définition peut être trouvée dans [KS88], représente une coupe du crâne humain. À l'intérieur de celui-ci, se trouvent des zones d'atténuation différentes correspondant à des formes typiques de ce que l'algorithme doit être capable de reproduire.

Shepp-Logan facile : La structure de cette mire est identique à la précédente. Cependant, les valeurs des coefficients d'atténuation ont été modifiées afin de faciliter l'observation des contrastes. Ils consistent à augmenter de 25 ou 50 fois la différence entre les coefficients de la structure de base et ceux des autres zones.

H.G.D. : L'image a été inspirée de la mire utilisée dans [HGD11] afin de comparer les performances de certains algorithmes de reconstruction en tomographie. Elle est composée de plusieurs disques qui varient en taille et en atténuation. Cette mire permet d'évaluer les limites des algorithmes. Elle permet d'évaluer la limite d'amplitude et de surface qu'une zone uniforme doit avoir pour être visible dans la solution.

Catphan CTP401 : Les mires Catphan sont utilisées pour tester et ajuster la qualité des reconstructions. Habituellement, elles servent à tester l'équipement. Après une lecture d'un de leurs catalogues⁵, il a été décidé d'inclure dans les tests le module CTP401 afin d'obtenir un aperçu de la performance des algorithmes sur une structure utilisée dans le domaine. La mire utilisée est une approximation du module CTP401.

4. Analyses accomplies

L'objectif principal de ce document est de comparer l'efficacité des algorithmes. Or, il existe plus d'une technique pour comparer leurs performances. L'approche choisie dans ce projet est divisée en deux parties. Pour commencer,

3. Programme open source de simulation de tomographie, <http://ctsim.org/>

4. Le rapport de signal-sur-bruit est donné par $N/\sigma = N/\sqrt{N}$

5. Il est accessible à la page web www.phantomlab.com/documents.php

elle propose d'observer le comportement des méthodes au fil des itérations. Ensuite, elle confronte les résultats des algorithmes afin d'en tirer un classement selon différents critères.

Cependant, cette dernière approche présente quelques difficultés. Tout d'abord, le comportement et les solutions obtenues par les méthodes sont potentiellement sensibles à la configuration de l'acquisition, à la solution initiale, à l'objet analysé et à la qualité des données obtenues. Les analyses de ce projet se limitent à une seule configuration⁶. Tous les tests sont initialisés avec une image dont toutes les valeurs d'atténuation sont égales à 0.02. La section 3 introduit les 16 problèmes que doivent résoudre les méthodes, soit 4 mires avec chacun 4 niveaux de bruit. Cet éventail d'expériences sera utilisé pour tenter de présenter des données indépendantes des mires et/ou de la qualité des acquisitions. D'autres obstacles se présentent lorsque les solutions des méthodes sont comparées. Il faut choisir un critère d'arrêt pour les algorithmes et définir une méthode pour évaluer le meilleur résultat. Notez que dans ce travail, la valeur du gamma est de 0.1 pour tous les algorithmes sauf lorsque les OS sont utilisés, où il vaut 0.01. Le gamma a été choisi après des tests effectués sur les APT. La modification apportée pour les OS est motivée par un désir de garder la même force de pénalisation pour tous les algorithmes et le fait que l'utilisation de 10 sous-groupes divise le problème de départ en 10 sous-problèmes. La force du epsilon est fixée à 0.8 et le $x_critique$ correspondra à la plus petite différence d'atténuation non-nulle. Soit 0.05, 0.001, 0.005 et 0.089, respectivement pour Shepp-Logan facile, Shepp-Logan, H.G.D et CTP401.

4.1. Observer l'évolution des solutions au fil des itérations

L'objectif derrière l'observation du comportement des méthodes est de fournir suffisamment d'information afin de pouvoir les classer. En vue d'accomplir cette tâche, cet article propose d'observer trois variables : le MSE⁷ entre la solution à une itération donnée et la mire pixelisée, la LMH⁸ de la ligne B et la variance de la zone A⁹. Les valeurs affichées sont les moyennes des valeurs sur les 16 tests. Les variables ont été enregistrées à toutes les 10 itérations, et ce jusqu'à la 80ième itération. C'est en observant que les APT produisaient des images convenables en 80 itérations et le désir de ne pas faire trop d'itérations qui a motivé le choix de cette borne. Notez que dans ce document, une itération est définie comme une mise à jour de la solution courante. Donc, une application de la méthode convexe OS 10 est comptée pour 10 itérations. Afin que les résultats soient semblables entre les algorithmes, ils sont tous compilés aux 10 itérations. Les méthodes vont être séparées en deux graphiques selon qu'ils ont un terme de régularisation ou non, et ce, pour chaque variable. Ils seront respectivement nommés algorithmes pénalisés et algorithmes standards. L'ajout de $_P$ à un nom d'algorithme indique qu'il fait partie des algorithmes pénalisés. Le but est d'éviter

6. Voir section 6.3.

7. *Mean square error* ou erreur quadratique moyenne

8. La largeur à mi-hauteur est évaluée sur une ligne verticale de 18 voxels. Afin de diminuer l'effet du bruit sur l'évaluation du LMH, cette ligne est la moyenne de 22 lignes de même longueur et dont chacune intersecte perpendiculairement la ligne B. L'intersection divise les 22 lignes en deux parties égales.

9. Voir la section 6.2

de surcharger les graphiques et de permettre une comparaison rapide entre ces deux types d'algorithmes. Les graphiques sont tous d'une forme semblable à la figure 4a. Chaque algorithme est représenté par une ligne brisée d'une couleur indiquée dans la légende. Cette courbe représente la moyenne de l'évolution de la variable en question sur les 16 tests selon les itérations.

4.2. Comparer les solutions obtenues avec un critère d'arrêt

Pour être en mesure de comparer les résultats produits par chacune des méthodes, il faut déterminer un critère d'arrêt. Habituellement, l'objectif principal en tomodensitométrie est de reconstruire une image qui a une résolution satisfaisante. Une approche reconnue pour évaluer la résolution est de mesurer la LMH. De plus, des analyses préliminaires montrent que les algorithmes itératifs commencent par produire la forme générale de la mire¹⁰. Donc pour cette batterie de tests, les algorithmes itèrent jusqu'à ce que la LMH de la ligne B soit suffisamment petite. Toutefois, certains algorithmes convergent trop lentement vers une LMH acceptable ou même qu'ils commencent à croître au fil des itérations. Ainsi, les algorithmes ont été fixés à une limite de 200 itérations. Ceci correspond à 2.5 fois plus que ce qui est nécessaire pour les algorithmes APT avant d'obtenir une solution très proche, à vue d'œil, de leur mire respective. De plus, des expériences préliminaires indiquent que les algorithmes avec un terme de régularisation ont des valeurs de LMH plus élevées. Cette différence est induite par l'effet de lissage du terme de pénalisation. Suite à d'autres tests, les choix de LMH sont fixés à 2 voxels et à 5 voxels pour les algorithmes standard et les *algorithmes_P* respectivement. Le critère d'arrêt étant choisi, il ne reste plus qu'à choisir les critères de comparaison. L'une des caractéristiques les plus importantes lorsque vient le temps de comparer des méthodes de reconstruction est la durée de calcul. Afin que les conclusions soient les plus générales possibles, les données affichées correspondront aux moyennes des 16 cas disponibles. Ensuite, le MSE et la variance dans la zone A seront calculés pour permettre d'évaluer qualitativement les solutions obtenues. Des diagrammes à bandes, tel que présenté en figure 11a, seront utilisés pour faciliter les comparaisons. La hauteur d'une bande représente la moyenne de la variable pour les tests présentés par cette dernière. Dans la figure 11a, la bande à l'extrémité gauche représente la moyenne des MSE pour les 4 mires lorsque reconstruites en utilisant l'algorithme convexe avec 10 OS, et ce, pour des données non bruitées. Les bandes sont triées en ordre croissant de bruit. Il s'agit des mêmes sous-groupes pour les graphiques sur la variance. Dans le graphique qui représente la durée de reconstruction des algorithmes, la bande à gauche correspond à la version standard de l'algorithme.

5. Résultats obtenus

Avant d'évaluer la capacité des algorithmes à produire une solution exacte et rapide, il faut observer comment ils se comportent généralement. Préalablement à la lecture des résultats, il faut spécifier certains détails. Les figures nommées

10. Ce constat n'est pas toujours vrai, et en conséquence, il a fallu demander un minimum d'itérations, 15 dans cette expérience, avant l'arrêt de l'algorithme.

dans cette section se retrouvent toutes dans la section 6.6. Les notations "*FObj1*" ou "*" font référence à la fonction objectif $G(\mu)$.

5.1. Comportement des algorithmes sur 80 itérations MSE sur 80 itérations

Les figures 4a et 5a montrent que les solutions courantes des variantes du *GC* commencent loin de la solution de départ et peinent à rattraper les autres méthodes. Cette observation n'est pas sans fondement. Ces algorithmes sont les seuls qui doivent inclure un terme de barrière. Or, lors des tests, il n'y avait pas suffisamment d'information pour gérer la force de la barrière. Donc, il est possible qu'il existe un meilleur choix de ρ_0 qui améliorerait leur performance. De plus, il est possible de constater que les performances sont pires lorsqu'un terme de régularisation est ajouté. Cette constatation peut être expliquée par le choix de majoration qui n'est pas optimale. Puisqu'il est difficile de voir l'évolution des autres algorithmes dans ces figures, une figure correspondante, avec une échelle logarithmique a été jointe. La figure 4b montre une augmentation du MSE des algorithmes standards ce qui indique qu'ils s'éloignent des mires¹¹. Ce résultat est attendu puisque la solution optimale d'un sinogramme bruité est une image bruitée. L'ajout d'un terme de régularisation permet de corriger cette divergence (Figure 5a). Remarquez que la courbe de *convex* n'est pas visible dans ces figures. Cela est dû au fait qu'elle est trop près de la courbe de *convexos10*. Ainsi le fait d'utiliser environ 10 fois moins d'information par itération a permis d'obtenir des résultats quasi identiques à la méthode utilisant la totalité des données. On note aussi dans la figure 4b que les variantes de *L-BFGS-B* se comportent correctement au début, mais divergent de la solution voulue dès la 20ième itération. Cette procédure est reconnue pour sa grande vitesse de convergence, ce qui n'est pas nécessairement voulu lorsque les données sont bruitées. La figure 5a montre que l'ajout d'un terme de régularisation rend ses performances équivalentes aux APT. En résumé, les algorithmes qui se comportent le mieux pour le MSE, avec ou sans fonction pénalisation, sont *convexos10* et *convex*.

LMH sur 80 itérations

Avec les figures 6a et 7a, il est possible de voir l'évolution de la LMH selon les itérations. Bien que la LMH semble être quasi indépendante du terme de régularisation, il converge vers des valeurs différentes, soit 2 et 5 voxels respectivement pour tous les algorithmes sauf les GC. D'ailleurs, le comportement des variantes du *GC* dans les 30 premières itérations est complètement différent de ceux des autres algorithmes. Les hypothèses retenues, après analyse des images à chaque 10 itérations, sont que la fonction barrière est trop forte au départ ou que sa force n'est pas suffisamment diminuée au fil des itérations. Ces hypothèses sont motivées par le fait que les premières estimées de ces algorithmes ont des coefficients d'atténuation élevés dans des zones où ils devraient être nuls. Pour être en mesure de départager les procédures selon la LMH, il faut regarder les figures 6b et 7b qui représentent un zoom des figures précédentes sur les meilleurs algorithmes. Tout d'abord, notez que *gradient* et *gradient_P* semblent être meilleur que leurs confrères. Toutefois, cette avance semble être favorisée par la limite de

11. Ce constat n'est pas vrai pour les variantes du gradient conjugué. Cette contradiction provient sûrement du fait qu'elles ne sont pas encore suffisamment près de leur solution.

80 itérations puisque *L-BFGS-B* et *L-BFGS-BFObj1* semblent être en mesure de les rattraper. De plus, les méthodes *convex* et *convexos10* n'ont pas eu le même genre de départ et *convexos10* a toujours un peu d'avance sur *convex*. Pour finir, les APT semblent tous avoir un comportement semblable, et ce, dans le cas avec et sans le terme de régularisation. Cette constatation est logique avec le fait qu'ils ont tous plus ou moins été construits sur les mêmes bases. En outre, les variantes de *L-BFGS-B* gèrent plus difficilement l'ajout d'un terme régulateur que les APT. Considérant la vitesse de convergence de ce dernier, il faudrait peut-être songer à diminuer la force de la fonction de pénalisation lorsqu'il a atteint une certaine valeur de la fonction objectif.

Variance sur 80 itérations

L'analyse de l'évolution de la variance de la zone B¹² selon les itérations confirme certaines des conclusions obtenues en observant le MSE. La figure 8a montre que lorsque les algorithmes itèrent trop longtemps, ils commencent à inclure du bruit dans la solution. De plus, elle appuie le fait que *L-BFGS-B* et *L-BFGS-BFObj1* débutent tôt à reproduire le bruit. La figure 9a, pour sa part, apporte un peu plus d'information. Ce graphique semble indiquer que les APT ont plus tendance que les SG à reconstruire le bruit localement, ce qui ne se voyait pas dans les graphiques de MSE. Pour finir, la figure 8b, qui est un zoom sur les lignes brisées les plus basses de la figure 8a, semble indiquer que les variantes du *GC* ont un contrôle acceptable du bruit localement lorsqu'il n'inclut pas un terme de régularisation. Cette dernière remarque supporte l'idée que ces algorithmes ont du potentiel et qu'une meilleure gestion de l'interaction entre la fonction barrière et de pénalisation, suivie d'une meilleure majoration, pourraient améliorer leurs performances.

5.2. Comparaison des solutions obtenues à l'arrêt Variance avec critère d'arrêt sur LMH

L'idée de cette sous-section est de présenter le meilleur algorithme lorsque le but est d'obtenir des solutions dont les zones uniformes ont le moins de bruit possible. Si les figures 10a et 10b sont utilisées pour comparer les méthodes, il en ressort que les algorithmes *trml_P* et *GC_P* sont les plus performants. En outre, les algorithmes avec un terme régulateur se comportent mieux que leur confrère. Toutefois, il faut savoir que *GC_P* a de la difficulté à atteindre le critère d'arrêt. Donc, il est possible qu'il n'ait simplement pas convergé suffisamment pour reconstruire le bruit. Dans une situation où utiliser un algorithme avec un terme de pénalisation est déconseillé, notez que l'algorithme *trml* est un choix judicieux.

MSE avec critère d'arrêt sur LMH

Maintenant, les algorithmes seront classés selon le MSE entre la solution à l'arrêt de l'algorithme et la mire originale. En observant les figures 11a et 11b, il est possible de constater que les résultats sont beaucoup plus stables avec les méthodes pénalisées, mais que les résultats dans les cas peu bruités sont meilleurs avec les procédures standard. Donc, si le niveau de bruit est relativement faible, il est avantageux de prendre une méthode standard. Plus particulièrement, la

12. Voir section 6.2

figure 11a montre qu'utiliser $L\text{-BFGS-B}$ ou $L\text{-BFGS-BFOb1}$, lorsque les données sont prises dans des bonnes conditions, est un choix judicieux. Cependant, si des solutions stables sont recherchées, mieux vaut prendre des algorithmes pénalisés. En outre, convexos_P a obtenu des résultats supérieurs et plus stables que ses confrères pénalisés. Toutefois, il ne faut pas écarter $L\text{-BFGS-B_P}$ et $L\text{-BFGS-BFOb1_P}$ qui sont très proches de celui-ci. Afin d'appuyer les résultats précédents, la section 6.5 montre des images obtenues avec certains algorithmes pour la mire Shepp-Logan-easy lorsque la source envoie théoriquement 1000 photons. Les reconstructions obtenues par les algorithmes pénalisés sont flous ce qui indique que le gamma choisi était un peu trop fort.

Temps de calcul avec critère d'arrêt sur LMH

Le dernier critère de comparaison utilisé dans ce projet est la durée de reconstruction. Les données obtenues pour chacun des algorithmes sont illustrées dans la figure 12a. La figure montre que convexos se distingue des autres méthodes. Ensuite, il y a les variantes de $L\text{-BFGS-B}$ suivi de près par convex et Gradient . Notez que la durée affichée n'a pas été pénalisée lorsque la méthode est arrêtée avant d'atteindre la LMH visé. Toutefois, les variantes de GC sont celles qui ont le moins réussi à atteindre cette cible, ce qui ne change pas le classement actuel. $L\text{-BFGS-B_P}$ et $L\text{-BFGS-BFOb1_P}$ ont eu, eux aussi, quelques problèmes à arriver à l'objectif. Donc, leurs valeurs sont sous-évaluées dans cette figure. La figure 12b n'inclut que les tests qui ont atteint la LMH critique. Cette figure montre seulement que les variantes du GC utilisées dans ce travail ont de la difficulté à converger et que les algorithmes pénalisés n'atteignent pas toujours le critère d'arrêt. Cette dernière remarque pourrait provenir de la force du gamma.

Conclusion

Pour terminer, un rappel sur certains des résultats obtenus. Pour commencer, l'utilisation de méthodes standards devrait être limitée aux données qui sont peu contaminées par du bruit puisque la qualité de la reconstruction est très affectée par la présence de bruit. Sinon il vaut mieux utiliser les méthodes robustes que sont les algorithmes pénalisés. De plus, malgré les réserves faites sur la convergence des APT utilisant des OS, les figures de ce projet semblent indiquer que ces algorithmes ont un comportement égal ou même supérieur aux autres méthodes. Ensuite, les résultats de ce projet démontrent encore que les variantes de $L\text{-BFGS-B}$ sont très efficaces en tomographie. Toutefois, les résultats de ce document déconseillent de l'utiliser sur des données relativement bruitées sans terme de pénalisation. Enfin, les résultats de l'implantation de variantes de gradient conjugué n'ont pas été fructueux. Or, ils indiquent que cette méthode possède du potentiel. Il suffirait de la retravailler sur les points notés précédemment. Ce document présente une comparaison entre quelques algorithmes applicables à la tomographie. Il est possible d'approfondir le sujet de plusieurs façons. Quelques unes sont présentées dans les articles [FR96], [HGD11] et [TTL11].

6. Annexe

6.1. Notations.

I	Nombre de projections N_p multiplié par le nombre de détecteur N_d (i)
J	Nombre de voxels (j)
μ	Vecteur de J éléments tel que μ_j est la moyenne d'absorption dans le voxel j
l	Matrice $I \times J$ tel que l_{ij} est la longueur d'intersection entre la projection i et le pixel j
k	Indice utilisé pour représenter les voxels traversés par une projection
Y	Vecteur colonne de I éléments tel que Y_i est le nombre de photons détecté à la projection i lorsque l'objet est présent
b	Indice utilisé pour représenter les différents détecteurs
\bar{Y}	Vecteur colonne de I éléments tel que $\bar{Y}_i = Y_i/d_b$ où $b = i \bmod N_d$
γ	Constante utilisée dans la fonction pénalisation
$w_{j_1 j_2}$	Si j_1 et j_2 partagent 0, 1 ou 2 vertex, alors $w_{j_1 j_2}$ vaut respectivement 0, $1/\sqrt{2}$ et 1
κ	Ensemble de J valeurs tel que κ_j représente le poids relatif du voxel j (Définit en [FR96])
ϵ	Constante utilisée dans la fonction potentiel
η	Utilisée pour évaluer ϵ , elle modifie la force de la fonction potentiel
x_{crit}	Utilisée pour évaluer ϵ , elle modifie le comportement de la fonction

6.2. Zone d'importance pour l'évaluation du LMH et de la variance

L'image qui suit est la superposition des 4 mires à laquelle a été ajouté la position de la zone A et celle de la ligne B.

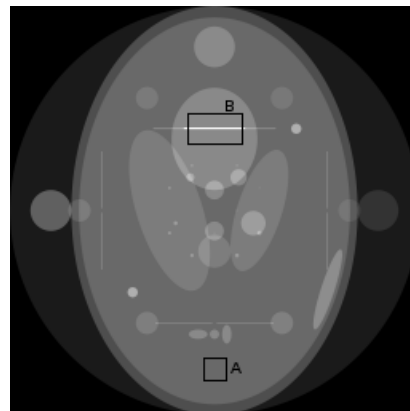


FIGURE 1. Zone utilisée pour les tests

6.3. Configuration d'acquisition.

Dimension de l'image	20cm x 20cm
Discrétisation	256 x 256
Mode d'acquisition	Géométrie à angles égaux
Nombre de détecteurs	520
Nombre de projections	360
Largeur angulaire du panneau des détecteurs	60°
Distance entre la source et le point de rotation	28.2843 cm
Rayon de courbure des détecteurs	56.5686 cm

6.4. Mires.

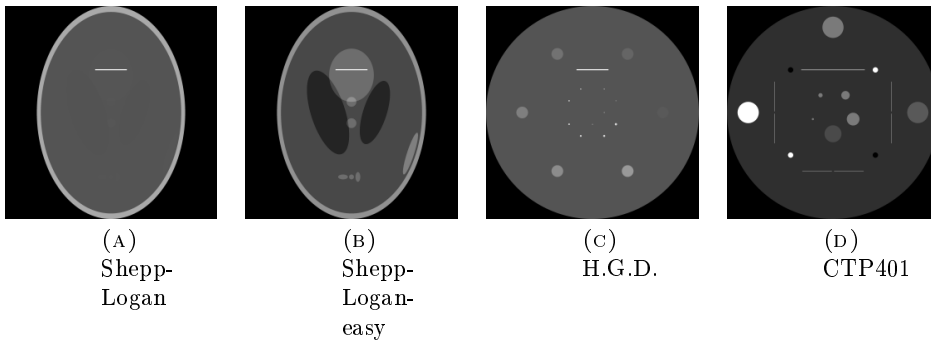


FIGURE 2. Mires : Noir = 0 et blanc = 2.5

6.5. Comparaison d'images obtenues avec quelques algorithmes

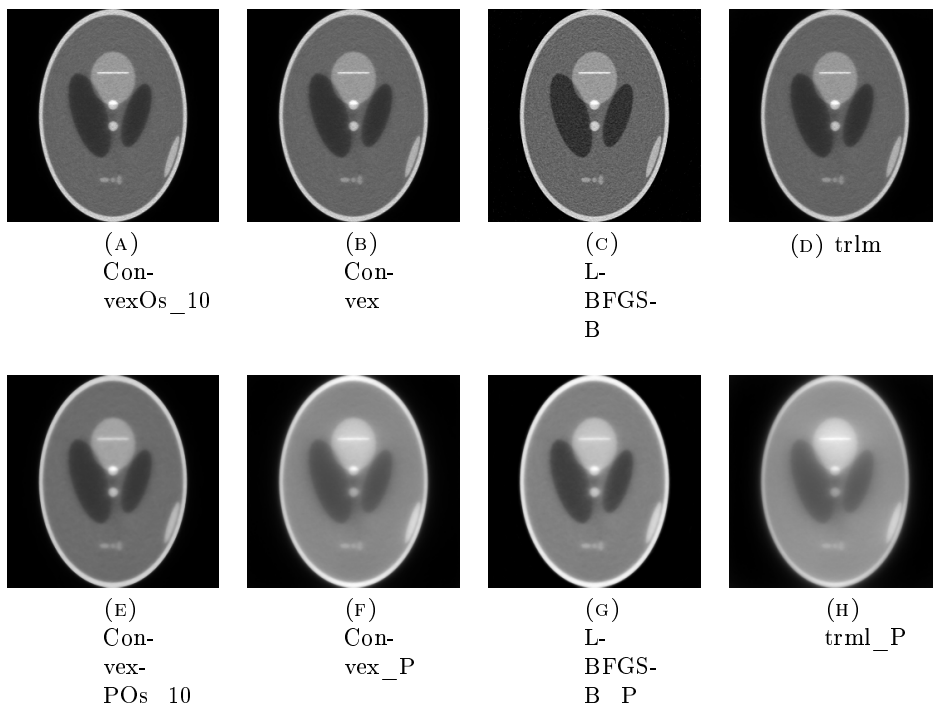


FIGURE 3. Images obtenues pour différents algorithmes avec la mire Shepp-Logan-easy et en utilisant une source de 1000 photons. Les algorithmes standards et pénalisés ont été arrêtés lorsque la ligne B de la solution courante avait un LMH de 2 et de 5 respectivement. Un pixel noir et un pixel blanc représentent respectivement un coefficient d'atténuation de 0 et de 2.5

6.6. Figures utilisées dans l'analyse

Soit $MSE_k^{(i,j)}$ le MSE entre la mire i et la solution à l'itération k d'un algorithme appliqué sur un sinogramme de la mire i avec un niveau de bruit j . Les mires et les niveaux de bruit sont introduits à la section 3. Soit $Var_k^{(i,j)}$ et $LMH_k^{(i,j)}$ respectivement la variance de la zone A et la largeur à mi-hauteur de la ligne B (Voir section 6.2) de la solution à l'itération k d'un algorithme appliqué sur un sinogramme de la mire i avec un niveau de bruit j . Alors, MSE_k^* , Var_k^* et LMH_k^* sont respectivement les moyennes des $MSE_k^{(i,j)}$, des $Var_k^{(i,j)}$ et des $LMH_k^{(i,j)}$ pour les 4 mires avec chacun des 4 niveaux de bruit. Soit $MSE^{(i,j)}$ et $Var^{(i,j)}$ respectivement $MSE_{k^*}^{(i,j)}$ et $Var_{k^*}^{(i,j)}$ où k^* représente l'itération à laquelle la solution courante a atteint le critère d'arrêt. Soit $Recon_Time^{(i,j)}$ le temps nécessaire pour atteindre le critère d'arrêt d'un algorithme appliqué sur un sinogramme de la mire i avec un niveau de bruit j . Alors, $MSE^{*,j}$ et $Var^{*,j}$ sont respectivement la moyenne des $MSE^{(i,j)}$ et la moyenne des $Var^{(i,j)}$ sur les 4 mires à un niveau de bruit j . L'ordre, de gauche à droite, des niveaux de bruit est noNoise, 10000c, 1000c et 100c. $Recon_Time^*$ est la moyenne des $Recon_Time^{(i,j)}$ pour les 4 mires avec chacun des 4 niveaux de bruit.

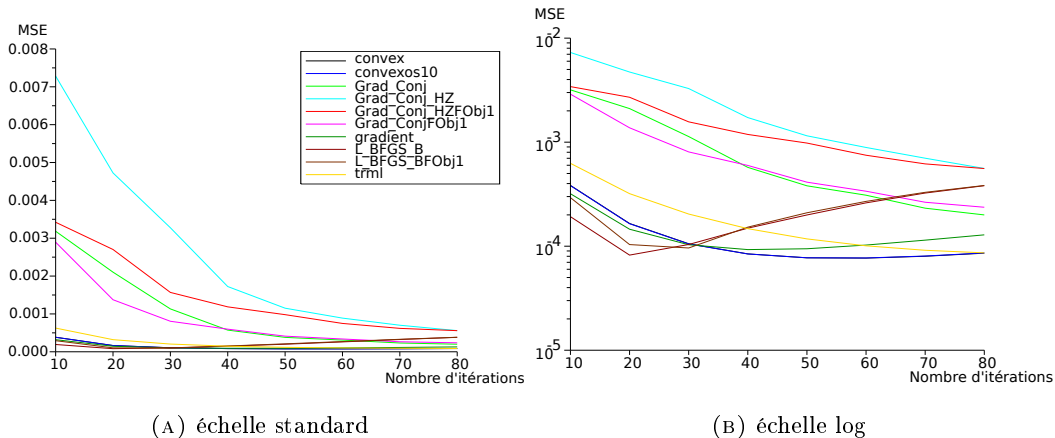


FIGURE 4. MSE_k^* à chaque 10 itérations pour chacun des algorithmes standards

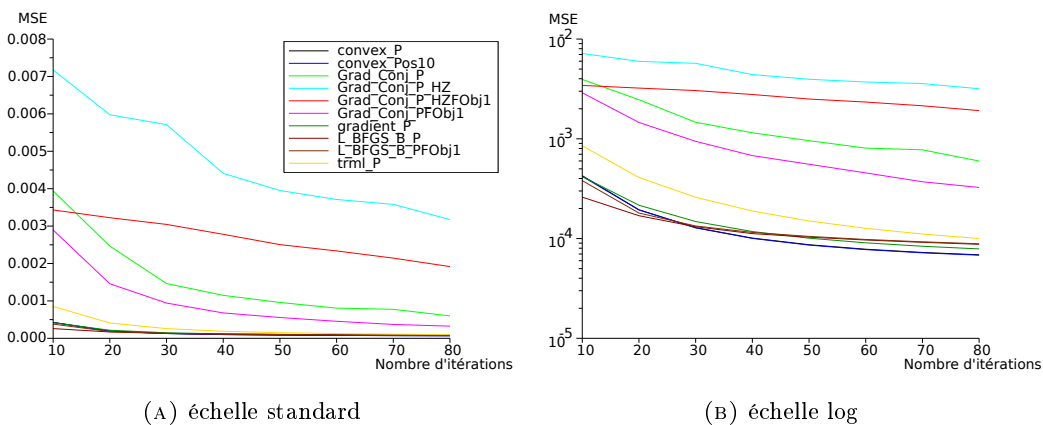


FIGURE 5. MSE_k^* à chaque 10 itérations pour chacun des algorithmes pénalisés.

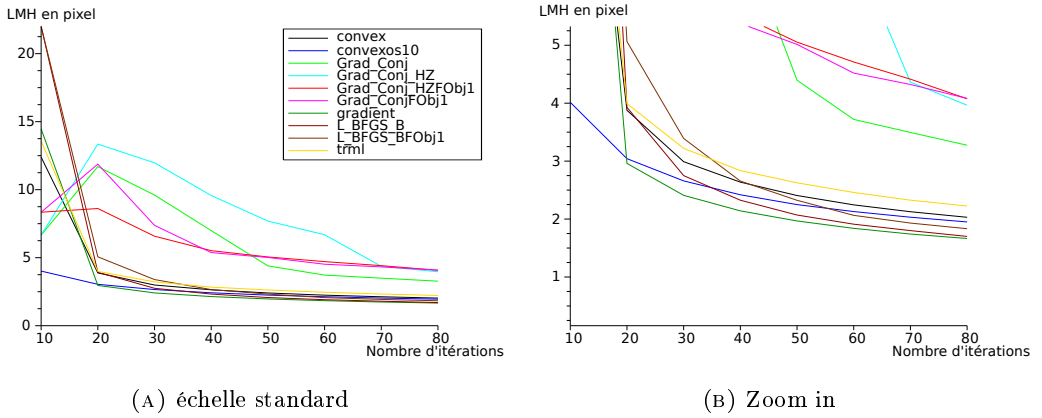


FIGURE 6. LMH_k^* à chaque 10 itérations pour chacun des algorithmes standards

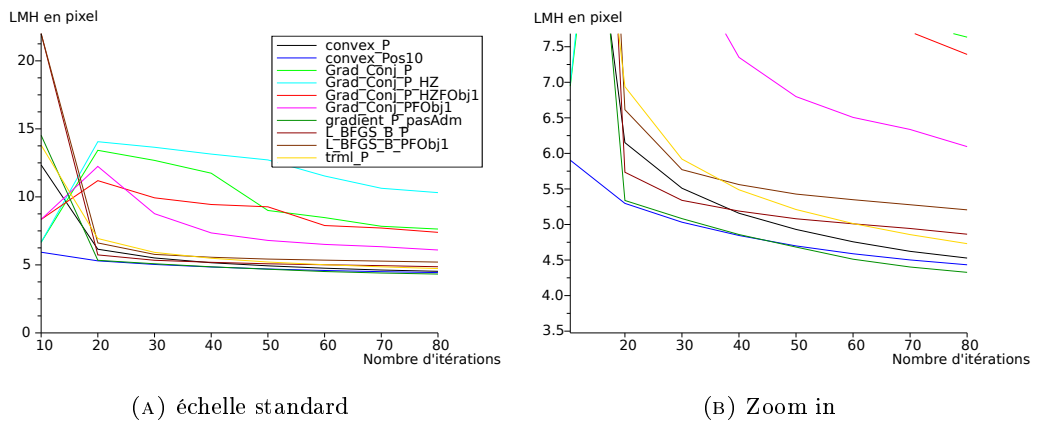


FIGURE 7. LMH_k^* à chaque 10 itérations pour chacun des algorithmes pénalisés

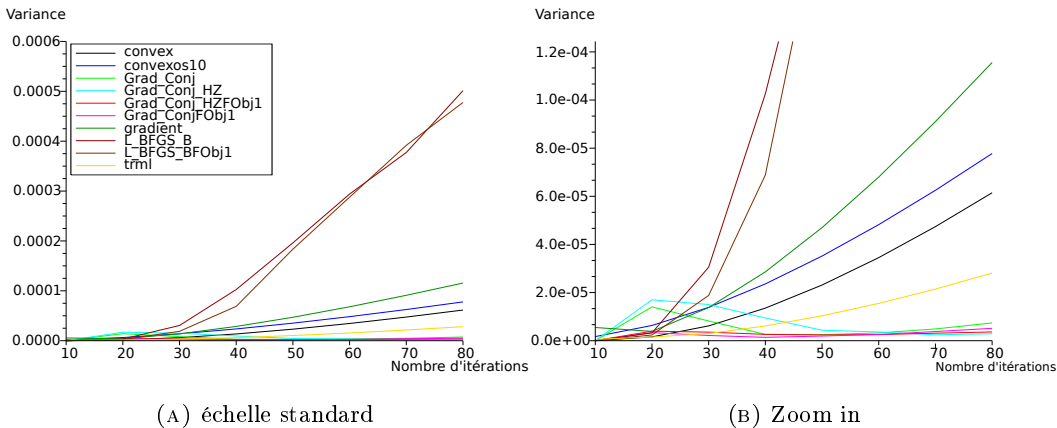


FIGURE 8. Var_k^* à chaque 10 itérations pour chacun des algorithmes standards

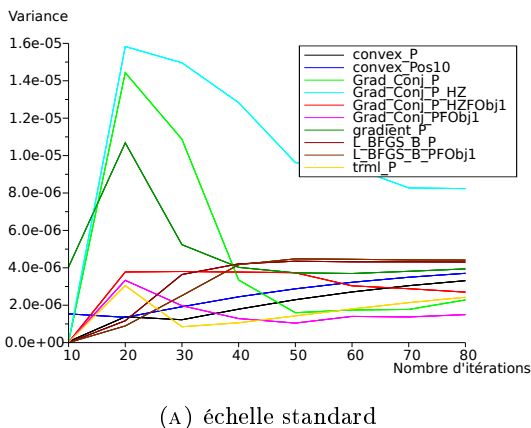


FIGURE 9. Var_k^* à chaque 10 itérations pour chacun des algorithmes pénalisés

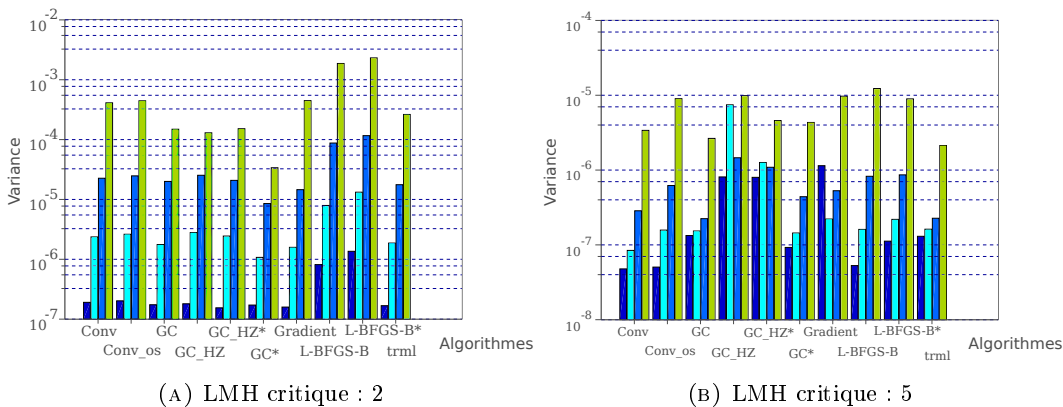


FIGURE 10. $\text{Var}^{*,j}$ selon les algorithmes pénalisés et le bruit représenté avec une échelle log. Les algorithmes sont arrêtés lorsque la solution courante a atteint la LMH critique ou lorsque le nombre d'itérations dépasse 200. Les couleurs de gauche à droite représentent respectivement noNoise, 10000c, 1000c et 100c.

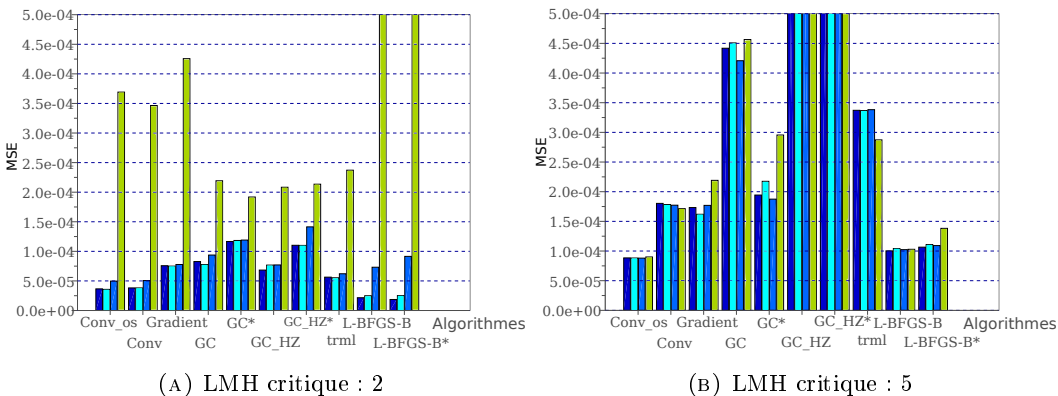


FIGURE 11. $\text{MSE}^{*,j}$ selon les algorithmes pénalisés et le bruit représenté avec une échelle log. Les algorithmes sont arrêtés lorsque la solution courante a atteint la LMH critique ou lorsque le nombre d'itérations dépasse 200. Les couleurs de gauche à droite représentent respectivement noNoise, 10000c, 1000c et 100c.

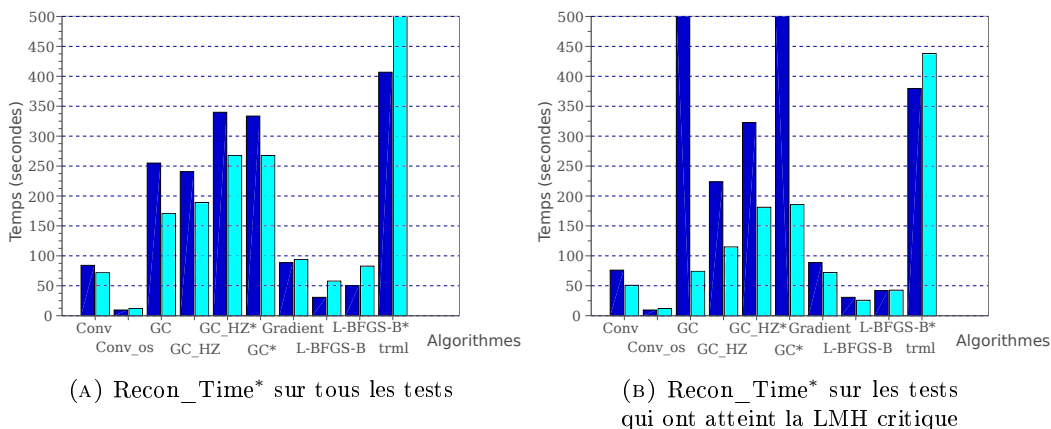


FIGURE 12. Recon_Time* selon les algorithmes et l'inclusion d'un terme de régularisation. Les algorithmes ont été arrêtés lorsque la LMH de la solution courante atteint la valeur critique ou lorsque le nombre d'itérations dépasse 200. La valeur critique pour les algorithmes standards (Bleu) et les algorithmes pénalisés (Cyan) sont respectivement de 2 et de 5. L'absence d'une colonne indique qu'aucun des tests a convergé.

Références

- [CMI09] É. Chouzenoux, S. Moussaoui & J. Idier, "A majorize-minimize line search algorithm for barrier function", version 4, 31 p., 2009.
- [D95] J-P. Dussault, "Numerical stability and efficiency of penalty algorithms", SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol 32, No. 1, pp. 296-317, 1995.
- [FR96] J.A. Fessler & W.L. Rogers, "Resolution properties of regularized image reconstruction methods", Technical Report No. 297, 25 p., 1996.
- [H80] G.T. Herman, "Image reconstruction from projections : The fundamentals of computerized tomography", IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 41, no 2, pp. 534-548, 1980.
- [HGD11] B. Hamelin, Y. Goussard & J-P. Dussault, "Comparison of optimization techniques for regularized statistical reconstruction in x-ray tomography", IEEE IPTA, pp. 87-91, 2011.
- [HZ05] W.H. Hager & H. Zhang, "A survey of nonlinear conjugate gradient methods", 21 p., 2005.
- [KB05] J.S. Kole & F.J. Beekman, "Evaluation of the ordered subset convex algorithm for cone-beam CT", Physics in Medicine and Biology, pp. 613-623, 2005.
- [KS88] A.C. Kak & M. Slaney, "Principles of Computerized Tomographic Imaging", IEEE, 327 p., 1988.
- [LC84] K. Lange & R. Carson, "EM reconstruction algorithms for emission and transmission tomography", Journal of Computer Assisted Tomography pp. 306-316 1984.
- [LF95] K. Lange & J.A. Fessler, "Globally convergent algorithms for maximum a posteriori transmission tomography", IEEE Trans on Image Processing pp. 1430-1438, 1995.

- [RP86] J. Radon & P.C. Parks, (translator), "On the determination of functions from their integral values along certain manifolds", IEEE Transactions on Medical Imaging 5, pp. 170-176, 1986.
- [SB93] K. Sauer, & C. Bouman , "A local update strategy for iterative reconstruction from projections," IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 41, no. 2, pp. 534-548, Feb. 1993.
- [TTL11] M. Toussaint, C. Thibaudeau, R. Lecomte, J.P. Dussault, "Description théo., analyse et comparaison de procédures d'optim. en tomodensitométrie.", Rapport de stage, U. Sherbrooke, 30 p., 2011.

MAXIME TOUSSAINT, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

CHRISTIAN THIBAUDEAU, DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE ET INFORMATIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE.

Courriel: `Maxime.Toussaint@usherbrooke.ca`

Courriel: `Christian.Thibaudeau@usherbrooke.ca`