

INTRODUCTION À L'HOMOLOGIE PERSISTANTE AVEC APPLICATION À LA SUSPENSION TOPOLOGIQUE

MARC ETHIER, AUTEUR INVITÉ

RÉSUMÉ L'homologie persistante, qui étudie la durée de la persistance de propriétés topologiques le long d'une filtration d'espaces, est fréquemment appliquée à de nombreuses disciplines, notamment à la comparaison de formes en informatique. Cependant, une question se pose : pour comparer deux objets, vaut-il mieux utiliser un grand nombre de fonctions de mesure pour extraire leurs propriétés, ou plutôt considérer un nombre réduit de fonctions et utiliser tout le pouvoir de la persistance pour comparer leurs propriétés en dimensions plus élevées ? Cela demeure une question ouverte, mais cet article y jettera un coup d'œil en plus de fournir une procédure se servant du concept topologique de suspension pour aider à construire des exemples numériques.

Marc Ethier est un étudiant au doctorat en mathématiques à l'Université de Sherbrooke. Son article a été écrit à la demande du comité de rédaction de CaMUS.

1 Introduction

La topologie algébrique est une branche des mathématiques qui consiste à étudier les propriétés d'espaces topologiques en se servant d'outils algébriques. En d'autres termes, à un espace topologique on peut associer un objet algébrique (groupe, module, espace vectoriel, etc.) qui, à travers sa structure, donne de l'information sur certains invariants topologiques de l'espace de départ. La topologie algébrique possède de plus en plus d'applications dans d'autres domaines du savoir, comme l'informatique, l'ingénierie, les sciences médicales, etc., étant donné que les objets algébriques en question peuvent fréquemment être calculés de façon algorithmique. En l'occurrence, le problème de la reconnaissance de formes en informatique bénéficie d'être abordé à l'aide de l'homologie persistante, une discipline qui consiste, compte tenu un objet (espace topologique) que l'on traverse avec une fonction continue en considérant, pour chaque valeur u , le sous-espace où la fonction prend des valeurs inférieures à u , à étudier combien de temps les invariants topologiques de ce sous-espace persistent. Cependant,

J'aimerais remercier le professeur Tomasz Kaczynski pour m'avoir suggéré le projet qui a mené aux principaux résultats décrits dans cet article. Je voudrais aussi remercier Claudia Landi de l'Università di Modena e Reggio Emilia pour m'avoir fourni l'image de la figure 2.

une question se pose : vaut-il mieux, pour améliorer le pouvoir de discrimination des méthodes algorithmiques de comparaison de formes, utiliser plus qu'une seule fonction continue, ou plutôt considérer des invariants topologiques en plus grande dimension ?

Cet article vise à entamer de répondre à cette question en introduisant une méthode basée sur le concept topologique de la suspension. La suspension est une opération topologique qui augmente de un la dimension des propriétés d'un espace. Cette méthode pourra entre autres permettre la construction de modèles ayant une topologie complexe en dimension quelconque, qui pourront servir à tester et comparer des algorithmes de comparaison de formes. Un autre but de cet article est de fournir au lecteur une idée intuitive de la topologie algorithmique et des applications qu'elle possède dans les sciences.

Nous commencerons, à la section 2, par décrire l'homologie telle qu'elle est utilisée en topologie algébrique, ainsi que ce domaine de recherche plus récent qu'est l'homologie persistante. À la section 3, nous introduirons le concept de suspension topologique, ainsi qu'une fonction que nous pouvons définir sur la suspension d'un espace et qui a les propriétés que nous recherchons. Nous décrivons ensuite les effets que cette opération a sur la persistance. Finalement, à la section 4, nous validerons les résultats obtenus grâce à des tests numériques.

2 Homologie persistante

2.1 Homologie

Le calcul d'homologie est une procédure fréquemment utilisée en topologie algébrique pour établir une correspondance entre des espaces topologiques et des objets algébriques tels que des modules ou des espaces vectoriels. De façon générale, ceci veut dire que deux espaces topologiques « identiques » (c'est-à-dire homéomorphes) auront la même structure homologique. Il existe une variété de théories de l'homologie définies sous des hypothèses différentes, mais les espaces qui seront considérés dans les cas d'application sont suffisamment simples pour que toutes ces théories coïncident. Une théorie de l'homologie relativement aisée à comprendre est l'*homologie simpliciale*, définie sur les complexes simpliciaux, et qui peut être étendue aux espaces triangulables, c'est-à-dire aux espaces topologiques homéomorphes à un complexe simplicial. Cette théorie, et d'autres théories de l'homologie, sont décrites dans [Mun84]. Si nous travaillons sur un corps \mathbb{K} , l'homologie de l'espace topologique X , dénotée $H_*(X; \mathbb{K}) = \{H_q(X; \mathbb{K})\}_{q \in \mathbb{Z}}$ ou simplement $H_*(X)$, sera une suite d'espaces vectoriels isomorphes à \mathbb{K}^{n_q} , qui sont tous entièrement déterminés par leur dimension n_q . L'information recellée dans l'homologie de X peut donc être entièrement décrite par la dimension des espaces d'homologie, que nous nommons *nombres de Betti* en l'honneur du topologue italien du 19^e siècle Enrico Betti.

Sans avoir à entrer trop profondément dans les théories sous-tendant l'homologie, nous pouvons dire que le q^e nombre de Betti de l'espace X , dénoté $\beta_q(X)$, correspond au nombre de « trous de dimension q » de X . Par exemple,

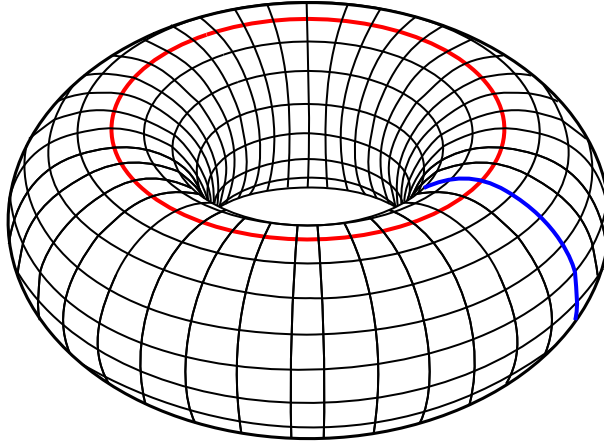


FIGURE 1 – Le tore, avec ses deux cycles d'ordre 1 indiqués. Version éditée d'une image produite par l'utilisateur de Wikipedia *YassineMrabet*.

si nous nous en tenons aux dimensions les plus fréquemment considérées dans les applications, $\beta_0(X)$ correspond au nombre de composantes connexes de X , $\beta_1(X)$ au nombre de trous, au sens ordinaire, dans X , et $\beta_2(X)$ au nombre de cavités enclavées dans X . À titre d'exemple, considérons la sphère topologique de dimension k , soit S^k . (S^0 se compose de deux points disjoints, S^1 est un cercle, S^2 est une sphère ordinaire, etc.) On remarque que pour tout $k > 0$, $\beta_q(S^k) = 1$ si $q = 0$ ou $q = k$, alors que $\beta_q(S^k) = 0$ pour les autres valeurs de q , tandis que $\beta_q(S^0) = 2$ si $q = 0$ et $\beta_q(S^0) = 0$ pour les autres valeurs de q . Cette apparente asymétrie a entraîné l'introduction du concept d'*homologie réduite* $\tilde{H}_*(X)$, dont la différence avec l'homologie ordinaire, en ce qui concerne les nombres de Betti, est que le nombre de Betti réduit d'ordre 0, $\tilde{\beta}_0(X)$, égale $\beta_0(X) - 1$ en supposant que X est non vide, tandis que $\tilde{\beta}_q(X) = \beta_q(X)$ pour $q > 0$. En d'autres mots, on peut interpréter $\tilde{\beta}_0(X)$ comme le nombre d'espaces vides entre les composantes connexes de X . On obtient donc que $\tilde{\beta}_k(S^k) = 1$, et $\tilde{\beta}_q(S^k) = 0$ si $0 \leq q \neq k$.

Exemple 2.1. Considérons le tore T . Ses nombres de Betti sont $\beta_0(T) = 1$, $\beta_1(T) = 2$ et $\beta_2(T) = 1$. En effet, le tore comprend une composante connexe et une cavité connexe. De plus, il possède deux « trous », ce que vous pouvez vérifier de la façon suivante : placez une corde autour de l'ouverture du tore. Il vous est impossible, même en étirant et déplaçant cette corde sur le tore, de la réduire à un point sans sortir de la surface. De même, si vous passez une extrémité de la corde dans l'ouverture et la joignez ensuite à l'autre extrémité, vous obtenez une boucle que vous ne pouvez pas réduire à un point. On vérifie aisément que ce *cycle d'ordre 1* est différent du précédent. Ces deux cycles sont illustrés sur la figure 1. De même, les nombres de Betti réduits du tore sont $\tilde{\beta}_0(T) = 0$, $\tilde{\beta}_1(T) = 2$, $\tilde{\beta}_2(T) = 1$.

2.2 Persistence

L'homologie persistante est apparue comme sujet de recherche au tournant des années 1990, d'abord comme *théorie de taille* (*size theory*) dans les travaux de Frosini *et al.*, puis de façon plus générale et dans des termes plus homologiques grâce à Edelsbrunner *et al.* Ce sujet se base sur le concept d'une *filtration* d'espaces topologiques, c'est-à-dire une collection indexée d'espaces topologiques X_u où la variable d'indice u appartient à un ensemble (complètement ou partiellement) ordonné, de telle sorte que $X_u \subseteq X_v$ si $u \leq v$. L'inclusion $j^{(u,v)} : X_u \hookrightarrow X_v$ induit une application linéaire $H_*(j^{(u,v)})$ entre les homologies $H_*(X_u)$ et $H_*(X_v)$. Formellement, dans le langage de la théorie des catégories, H_* est un *foncteur covariant* entre la catégorie des espaces topologiques, dont les morphismes sont des fonctions continues, et la catégorie des suites d'espaces vectoriels, dont les morphismes sont des suites d'applications linéaires. L'image de $H_q(j^{(u,v)})$, informellement parlant, correspond aux composantes topologiques de dimension q qui existent dans X_u et existent encore dans X_v . Dans le langage de la persistance, nous disons que ces composantes sont « nées » au temps u ou avant, et « meurent » plus tard que v .

Un exemple typique d'une filtration que nous voyons fréquemment dans les applications est celui de la filtration de sous-niveau pour une fonction continue $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, dite *fonction de mesure* ou de *filtration*. Dans ce cas, on définit X_u comme $\{x \in X \mid f(x) \leq u\}$ pour $u \in \mathbb{R}$, et on note l'inclusion de X_u dans X_v , pour $u \leq v$, par $j_f^{(u,v)}$. Le choix de la fonction de mesure f permet d'extraire des informations sur la géométrie de l'objet X , informations qui peuvent être caractéristiques. C'est pourquoi cette théorie peut être appliquée à la reconnaissance de formes en informatique. Tout comme dans la sous-section 2.1, nous travaillons sur un corps \mathbb{K} , et l'image de $H_q(j_f^{(u,v)})$ est donc un espace vectoriel. Soit $\Delta^+ = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u < v\}$, et définissons le *nombre de Betti persistant* d'ordre q pour la filtration associée à f comme

$$\beta_{f,q} = \dim \operatorname{im} H_q(j^{(u,v)}).$$

Pour des fins de simplicité de la notation, la dimension q pourra dans certains cas être omise, et dans d'autres cas être placée en exposant plutôt qu'en indice (soit β_f^q). Nous pouvons de manière similaire définir les *nombre de Betti persistants réduits*, qui seront notés $\tilde{\beta}_{f,q}$. La note précédente est aussi valide pour ceux-ci.

Les nombres de Betti persistants peuvent être décrits de façon simple par leur *diagramme de persistance*.

Définition 2.2. Soit $p = (u, v) \in \Delta^+$. Nous définissons sa *multiplicité* $\mu(p)$ comme le minimum, pour tout $\epsilon > 0$ tel que $u + \epsilon < v - \epsilon$, de

$$\beta_f(u + \epsilon, v - \epsilon) - \beta_f(u - \epsilon, v - \epsilon) - \beta_f(u + \epsilon, v + \epsilon) + \beta_f(u - \epsilon, v + \epsilon).$$

Si $\mu(p) > 0$, alors on appelle p un *point propre* pour β_f . Les points propres de β_f correspondent à des composantes topologiques nées en u et qui meurent en

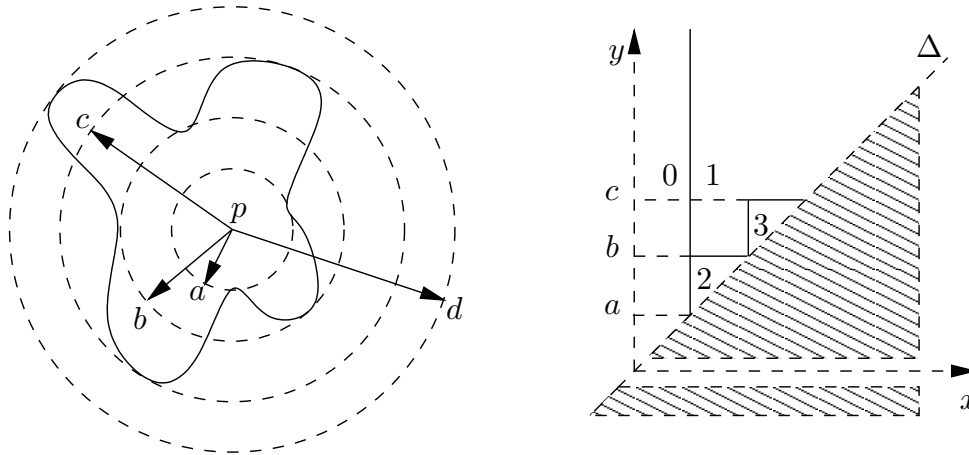


FIGURE 2 – À gauche : un modèle X , muni de la fonction f représentant la distance entre chaque point de X et le point dénoté p . À droite : le diagramme de persistance pour β_f^0 . On y voit un point à l'infini (d'abscisse a), un point propre de multiplicité 1 (aux coordonnées (a, b)) et un point propre de multiplicité 2 (aux coordonnées (b, c)).

v . Additionnellement, pour une droite verticale r d'équation $x = u$, on définit sa *multiplicité* $\mu(r)$ comme le minimum, pour tout $\epsilon > 0$ tel que $u + \epsilon < 1/\epsilon$, de

$$\beta_f(u + \epsilon, 1/\epsilon) - \beta_f(u - \epsilon, 1/\epsilon).$$

Si $\mu(r) > 0$, alors r est appelé un *point à l'infini* pour β_f , que nous identifions avec la paire (u, ∞) . Les points à l'infini de β_f correspondent à des composantes topologiques nées en u et qui ne meurent jamais, donc qui sont inhérentes à l'espace X . Finalement, le *diagramme de persistance* de β_f est un *multi-ensemble* (c'est-à-dire une généralisation d'un ensemble dans lequel les éléments peuvent apparaître plus d'une fois) composé des points propres et points à l'infini de β_f , chacun apparaissant le nombre de fois correspondant à sa multiplicité.

La figure 2 montre un modèle X muni d'une fonction de mesure continue f , ainsi que les diagrammes de persistance pour son nombre de Betti persistant $\beta_f^0(u, v)$.

Dans les applications, l'espace des diagrammes de persistance peut être muni d'une distance. L'intérêt de procéder ainsi est d'avoir une mesure calculable de la différence entre deux diagrammes, qui puisse potentiellement nous fournir de l'information sur la différence entre les modèles, c'est-à-dire les espaces munis de fonctions de mesure, qu'ils représentent. Une telle distance est la *distance d'appariement* (*matching distance*, [dFL06]). Soient $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de mesure continues définies sur deux modèles X et Y , et β_f, β_g les nombres de Betti persistants (d'un ordre quelconque) pour les fonctions f et

g . Pour éviter les technicalités, la définition de la distance d'appariement d n'a pas été incluse ici, mais intuitivement parlant, elle calcule le coût de la bijection optimale qui déplace les points du diagramme de β_f sur ceux du diagramme de β_g , gardant à l'esprit que si le point (u, v) est tel que $v - u$ est faible, il correspond à une composante de faible persistance et peut être éliminé sans grand coût. La valeur d fournit une borne inférieure pour la *pseudo-distance naturelle* entre les paires (X, f) et (Y, g) définie comme

$$\inf_h \max_{p \in X} |f(p) - g(h(p))|$$

où h varie parmi les homéomorphismes entre X et Y .

2.3 Persistence multidimensionnelle

Au cours des dernières années l'*homologie persistante multidimensionnelle* a gagné en importance comme sujet de recherche. Cette théorie s'intéresse au cas où la filtration d'espaces dépend de plus d'une variable ; en particulier, on pense à la filtration de sous-niveau pour une fonction de mesure sur X qui prend ses valeurs dans \mathbb{R}^k . Elle est alors définie à partir de l'ordre partiel sur \mathbb{R}^k : $X_u = \{x \in X \mid f(x) \preceq u\}$ pour $u \in \mathbb{R}^k$, où $x \preceq y$ signifie que $x_i \leq y_i$ pour $i = 1, \dots, k$. L'avantage de cette théorie est que la persistance multidimensionnelle permet de soutirer plus d'information sur la géométrie de X que la persistance ordinaire, mais son inconvénient est qu'il n'existe alors pas de descripteur pour les nombres de Betti persistants β_f aussi simple que les diagrammes de persistance. Il est par contre possible de réduire le calcul de l'homologie persistante multidimensionnelle au calcul de l'homologie persistante ordinaire pour une famille paramétrée de fonctions à valeur dans \mathbb{R} [BCF⁺08], soit :

$$\text{red}_{(\vec{l}, \vec{b})}^f(x) = \min_{i=1, \dots, k} l_i \max_{i=1, \dots, k} \frac{f_i(x) - b_i}{l_i}$$

où (\vec{l}, \vec{b}) est choisi dans l'ensemble des paires admissibles

$$\text{Adm}_k = \left\{ (\vec{l}, \vec{b}) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \mid \forall i \ l_i > 0, \sum_i l_i = 1, \sum_i b_i = 0 \right\}.$$

Une *distance d'appariement k -dimensionnelle* $D(\beta_f, \beta_g)$ entre les nombres de Betti persistants β_f pour $f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ et β_g pour $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^k$ peut ensuite être définie comme le maximum sur Adm_k de la distance d'appariement $d\left(\beta_{\text{red}_{(\vec{l}, \vec{b})}^f}, \beta_{\text{red}_{(\vec{l}, \vec{b})}^g}\right)$. Grâce à cette formulation réduite, nous pouvons utiliser la persistance multidimensionnelle dans les applications.

3 Suspension

3.1 Définition et propriétés

La *suspension* de l'espace topologique X est définie comme l'espace quotient $SX = X \times [-1, 1] / \sim$, où \sim est l'identification $(x, 1) \sim (y, 1)$ et $(x, -1) \sim (y, -1)$

pour tous $x, y \in X$ [Mun84, §33]. Nous pouvons visualiser cet espace comme un double cône sur X dont les sommets se trouvent aux valeurs de paramètre $s = \pm 1$. L'opération S est un foncteur qui décale la dimension de l'homologie réduite par 1 [Mun84, Th. 33.2], c'est-à-dire

$$\tilde{H}_{q+1}(SX) \cong \tilde{H}_q(X), \quad q \geq -1. \quad (1)$$

Nous pouvons réécrire cette équation en termes d'homologie ordinaire :

$$H_{q+1}(SX) \cong H_q(X), \quad \text{pour } q \geq 1, \quad (2)$$

$$H_1(SX) \oplus \mathbb{K} \cong H_0(X), \quad \text{et } H_0(SX) \cong \mathbb{K}. \quad (3)$$

Soit maintenant $x_0 \in X$. La *suspension réduite* de l'espace pointé (X, x_0) (un espace pointé est un espace topologique dont un point est spécifié comme point de base) est l'espace pointé $(\Sigma X, (x_0, 0))$, où ΣX est le quotient de SX obtenu par l'identification additionnelle $(x_0, s) \sim (x_0, 0)$ pour tout $s \in [-1, 1]$. Si X est triangulable, alors ΣX est homotopiquement équivalent à SX [Hat02, §4.3]. La figure 3 montre un exemple d'un espace topologique et de sa suspension.

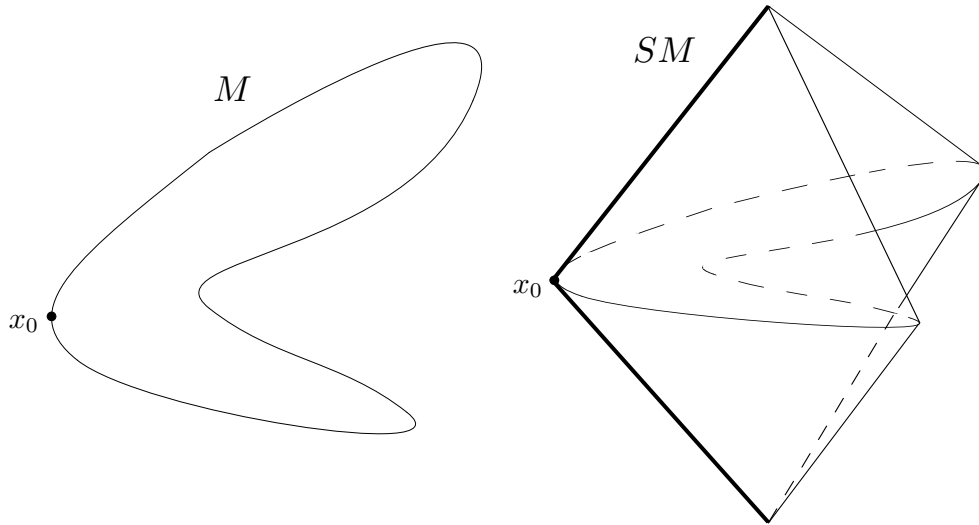


FIGURE 3 – À gauche : une variété M homéomorphe à S^1 , avec un point de base x_0 , qui peut être, par exemple, le minimum global de la première fonction de coordonnées. À droite : sa suspension SM . Dans la suspension réduite ΣM , tout le segment $\{x_0\} \times [-1, 1]$ (trait plus épais) serait réduit à un point.

Considérons maintenant des espaces topologiques munis de fonctions de mesure. Pour fixer les idées, supposons que $X = M$ soit une variété compacte lisse, et que $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ soit une *fonction de Morse*, c'est-à-dire une fonction de classe C^2 dont les points critiques sont non dégénérés et possèdent des valeurs critiques distinctes. Soit m_0 le minimum global de f , atteint en x_0 .

Définissons $Ef : M \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ comme

$$Ef(x, s) = s^2 m_0 + (1 - s^2) f(x). \quad (4)$$

On note que Ef atteint son minimum global sur l'union de $\{x_0\} \times [-1, 1]$ avec $M \times \{-1, 1\}$. Le long de chaque segment $s \mapsto (x, s)$, elle atteint son maximum en $(x, 0)$. La proposition suivante est une simple application du calcul différentiel. Rappelons que l'*indice de Morse* d'un point critique p de f est le nombre de directions linéairement indépendantes dans lesquelles f décroît à partir de p . Par exemple, un minimum est d'indice de Morse 0, un maximum est d'indice de Morse $\dim M$, et un col a un indice de Morse entre ces deux valeurs.

Proposition 3.1. *Le point (p, s) est un point critique de Ef si et seulement si l'une ou l'autre des conditions suivantes sont vérifiées : en premier lieu, p est un point critique de f autre que x_0 et $s = 0$, ou alors, en second lieu, $p = x_0$ ou $s = \pm 1$. De plus, dans le premier cas, p est d'indice de Morse λ si et seulement si $(p, 0)$ est d'indice de Morse $\lambda + 1$.*

Démonstration. Selon (4), nous obtenons

$$\nabla Ef(x, s) = ((1 - s^2)\nabla f(x), 2sm_0 - 2sf(x)).$$

Les composantes en x de ∇Ef sont nulles si et seulement si $\nabla f = 0$ ou $s = \pm 1$, tandis que la composante en s est nulle si et seulement si $s = 0$ ou $f(x) = m_0$ (cette dernière condition équivalant à $x = x_0$). Nous pouvons donc déceler deux cas où $\nabla Ef(p, s) = 0$: celui où $\nabla f(p) = 0$ et $s = 0$, avec $p \neq x_0$, ainsi que celui, composé de points non isolés où Ef atteint son minimum global de m_0 , où $p = x_0$ ou $s = \pm 1$.

Dans le premier cas, on note que p est un point critique d'indice de Morse λ de f si et seulement si il existe λ directions linéairement indépendantes dans M suivant lesquelles f décroît à partir de p . Ceci équivaut à dire qu'il existe λ directions de décroissance pour Ef dans $M \times \{0\}$, en plus de la direction correspondant à la variable s où Ef diminue aussi puisque $f(p) > m_0$. L'indice de Morse de $(p, 0)$ est donc de $\lambda + 1$. \square

Définissons les applications $S_{\mathbb{R}}f : SM \rightarrow \mathbb{R}$ et $\Sigma_{\mathbb{R}}f : \Sigma M \rightarrow \mathbb{R}$ comme compositions de Ef avec l'application quotient, respectivement, de $M \times [-1, 1]$ dans SM , et dans ΣM . L'énoncé de la proposition 3.1 s'applique aussi à $S_{\mathbb{R}}f$, incluant le fait que les points sur $\{x_0\} \times [-1, 1]$, tous critiques avec valeur critique m_0 , sont dégénérés. Par contre, en considérant $\Sigma_{\mathbb{R}}f$, on vérifie la condition d'isolation pour la classe d'équivalence de $(x_0, 0)$, qui devient l'unique point critique d'indice de Morse 0 de $\Sigma_{\mathbb{R}}f$. Le fait que SM n'est pas lisse aux deux sommets du cône, et que ΣM n'est pas lisse à son point de base, n'affecte pas les invariants homologiques étant donné que la fonction de mesure y atteint alors son minimum global m_0 .

Pour tout $u \in \mathbb{R}$, nous pouvons considérer les ensembles de sous-niveau

$$M_u = \{x \in M \mid f(x) \leq u\}$$

et

$$(SM)_u = \{(x, s) \in SM \mid S_{\mathbb{R}}f(x, s) \leq u\}.$$

Il est aisé de vérifier que $S(M_u) \subset (SM)_u$, mais l'inclusion inverse n'est cependant pas vraie. Nous pouvons néanmoins prouver le résultat suivant.

Lemme 3.2. *L'ensemble $S(M_u)$ est homotopiquement équivalent à $(SM)_u$.*

Démonstration. Si $u = m_0$ est le minimum absolu de f , alors il est évident que $S(M_u) = (SM)_u$.

Soit $EM = M \times [-1, 1]$, et notons $(EM)_u$ l'ensemble de sous-niveau pour Ef . Supposons premièrement que u est une valeur régulière, et construisons une déformation forte $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ de l'ensemble

$$X = (EM)_u \cup (M \times \{-1, 1\})$$

sur

$$A = E(M_u) \cup (M \times \{-1, 1\}).$$

Ces ensembles sont illustrés sur la figure 4. Puisque, pour tout $(x, s) \in A$, $H((x, s), \lambda)$ doit être constant pour $\lambda \in [0, 1]$, il suffira de définir H de façon continue sur $\overline{X \setminus A} \times [0, 1]$. Pour chaque $(x, s) \in X \setminus A$, $f(x) > u$. Rappelons que $\nabla Ef(x, s)$ égale 0 si et seulement si ou bien $s = \pm 1$ et $f(x) = m_0$, ou alors $\nabla f(x) = 0$. Le cas $f(x) = m_0$ a déjà été vérifié en début de démonstration. On note que $\{x_0\} \times [-1, 1]$ est disjoint de $\overline{X \setminus A}$. Suivant l'hypothèse que u est une valeur régulière, le champ de vecteurs gradient $-\nabla Ef$ définit un flot $t \mapsto \varphi((x, s), t)$ sur $\overline{X \setminus A}$ sur les trajectoires duquel Ef diminue. En l'absence de points critiques, tout $(x, s) \in \overline{X \setminus A}$ est envoyé par φ sur A en un temps fini $t(x, s)$. En effet, le fait que $t(x, s) < \infty$ peut être vérifié par l'équation différentielle pour la seconde coordonnée de $-\nabla Ef$,

$$\frac{ds}{dt} = 2sf(x) - 2sm_0,$$

dont la solution est $s(t) = s_0 e^{2t(f(x) - m_0)}$. Si la trajectoire de (x, s) n'atteint pas $E(M_u)$ en premier, alors la seconde coordonnée s doit atteindre 1 ou -1 . Par des arguments classiques de la théorie des systèmes dynamiques (cf. la preuve de continuité de τ dans [KMM04, Th. 10.37]), $t(x, s)$ est une fonction continue de $(x, s) \in X$.

Définissons $H : \overline{X \setminus A} \times [0, 1] \rightarrow \overline{X \setminus A}$ par la formule suivante :

$$H((x, s), \lambda) = \varphi((x, s), \lambda t(x, s)).$$

Selon les propriétés du flot, $H((x, s), 0) = (x, s)$, et selon le choix de $t(x, s)$, $H((x, s), 1) \in A$, pour tout $(x, s) \in \overline{X \setminus A}$. Si $(x, s) \in A$, alors $t(x, s) = 0$ et ainsi $H((x, s), \lambda) = (x, s)$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$. On en conclut que H est une déformation forte de X sur A .

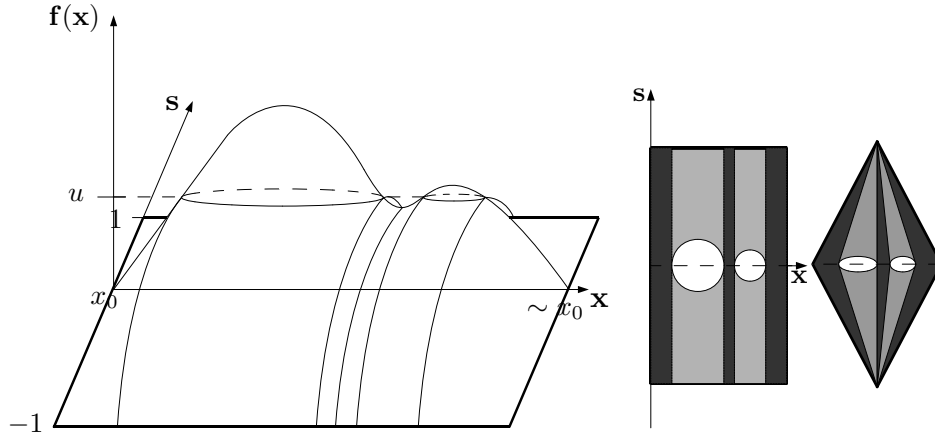


FIGURE 4 – À gauche : la fonction $Ef : M \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ pour une variété M avec fonction de mesure $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, qui atteint son minimum global en x_0 . La variété a été « déconnectée » en x_0 pour faciliter la visualisation. On voit que Ef atteint son minimum global sur l'union de $\{x_0\} \times [-1, 1]$ avec $M \times \{-1, 1\}$ (trait plus épais). Au milieu : Ef vue de haut. En gris foncé, l'ensemble $E(M_u)$; en gris pâle et foncé, l'ensemble $(EM)_u$ (lemme 3.2). À droite : $S(M_u)$ en gris foncé, $(SM)_u$ en gris pâle et foncé. $M \times \{-1\}$ et $M \times \{1\}$ sont tous deux réduits à un point.

Puisque, pour tout λ , $H(\cdot, \lambda)$ est l'application identité sur $M \times \{-1, 1\} \subset A$, la déformation $\tilde{H} : (SM)_u \times [0, 1] \rightarrow (SM)_u$ est bien définie par la formule

$$\tilde{H}(q(x, s), \lambda) = q(H((x, s), \lambda)),$$

où q désigne l'application quotient de EM dans SM . Ceci démontre que pour une valeur régulière u , il existe une équivalence homotopique $S(M_u) \cong (SM)_u$.

Soit maintenant u une valeur critique autre que le minimum absolu m_0 que nous avons déjà vérifié. Puisque u est isolée, il existe $\epsilon > 0$ tel que toutes les valeurs dans $(u, u + \epsilon]$ sont régulières. Dans la théorie de Morse classique, il est connu que M_u est un rétract de déformation forte de $M_{u+\epsilon}$, et donc $M_u \cong M_{u+\epsilon}$. Ainsi $S(M_u) \cong S(M_{u+\epsilon})$. Par un argument équivalent, $(SM)_u \cong (SM)_{u+\epsilon}$. Nous avons déjà montré que $S(M_{u+\epsilon}) \cong (SM)_{u+\epsilon}$, et donc, par transitivité, $S(M_u) \cong (SM)_u$. \square

3.2 Suspension et nombres de Betti persistants

Nous discuterons maintenant de l'effet de l'opération de suspension sur les nombres de Betti persistants pour une fonction de mesure f . Nous savons que M est triangulable, et nous supposons que dans les expérimentations numériques, nous utiliserons une triangulation ayant comme propriété que les points critiques de f (et en particulier x_0) soient des sommets. En fait, f sera linéaire par morceaux sur cette triangulation. Voici notre premier résultat.

Théorème 3.3. *Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse sur une variété M compacte et connexe. Pour tout $(u, v) \in \Delta^+$,*

$$\tilde{\beta}_{S_{\mathbb{R}}f}^{q+1}(u, v) = \tilde{\beta}_f^q(u, v), \quad q \geq -1. \quad (5)$$

Pour les nombres de Betti persistants non réduits, nous avons

$$\beta_{S_{\mathbb{R}}f}^{q+1}(u, v) = \beta_f^q(u, v), \quad q \geq 1, \quad (6)$$

$$\beta_{S_{\mathbb{R}}f}^1(u, v) = \begin{cases} \beta_f^0(u, v) & \text{si } u < m_0, \\ \beta_f^0(u, v) - 1 & \text{sinon} \end{cases}, \quad (7)$$

et

$$\beta_{S_{\mathbb{R}}f}^0(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < m_0, \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (8)$$

Ces formules sont aussi valides pour $\Sigma_{\mathbb{R}}f$.

Démonstration. L'équation (5) est une conséquence de (1), du lemme 3.2, et des propriétés fonctorielles de l'opération de suspension. L'équation (6) en découle directement. L'équation (8) provient de (3) et du fait que m_0 est le minimum absolu, et qu'en cette valeur naît donc une composante dont la persistance est infinie. Pour prouver l'équation (7), les arguments précédents prouvent la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} H_0(M_u) & \xrightarrow{H_0(j_f^{(u,v)})} & H_0(M_v) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H_1(SM_u) \oplus \mathbb{K} & \xrightarrow{H_1(j_{S_{\mathbb{R}}f}^{(u,v)})} & H_1(SM_v) \oplus \mathbb{K} \end{array}$$

Soient x_0, v_1, \dots, v_n des sommets représentatifs d'une base des générateurs de l'homologie H_0 pour M_u , et soient x_0, w_1, \dots, w_m ceux d'une base de l'homologie H_0 pour M_v . Ce que ceci veut dire est que l'espace M_u est composé de $n + 1$ composantes connexes, une d'entre elles associée à x_0 (il s'agit de celle dont la persistance est infinie) et n d'entre elles associées à des sommets v_i de notre triangulation. L'homologie $H_0(M_u)$ est un espace vectoriel de dimension $n + 1$ sur \mathbb{K} , que nous pouvons écrire

$$H_0(M_u) = \bigoplus_{k=1}^n \mathbb{K}[v_k - x_0] \oplus \mathbb{K}[x_0] = \tilde{H}_0(M_u) \oplus \mathbb{K}[x_0].$$

Il en va de même pour $H_0(M_v)$, remplaçant les v_k par les w_k et n par m . Ainsi $H_0(j_f^{(u,v)})$ se sépare en (ϕ_1, ϕ_2) , où

$$\phi_1 : \tilde{H}_0(M_u) \rightarrow \tilde{H}_0(M_v)$$

et $\phi_2 = \text{id}_{\mathbb{K}[x_0]}$. L'isomorphisme indiqué par la flèche verticale à la gauche du diagramme précédent se sépare en (ψ_1, ψ_2) où $\psi_1 : \tilde{H}_0(M_u) \rightarrow H_1(SM_u)$ et $\psi_2([x_0]) = 1_{\mathbb{K}}$. Le fait que la suspension du cycle d'ordre 0, $v_k - x_0$, est un cycle d'ordre 1 montre la validité de cet argument. Il en est de même pour l'isomorphisme associé à la flèche verticale de droite. Nous obtenons

$$\text{rang } H_1(j_{S_{\mathbb{R}}f}^{(u,v)}) = \text{rang } \phi_1 = \beta_f^0(u, v) - 1.$$

Puisque ΣM_u est homotopiquement équivalent à SM_u pour chaque u , les arguments sont aussi valides pour $\Sigma_{\mathbb{R}}f$. \square

Nous utiliserons le théorème 3.3 pour prouver des résultats concernant la distance d'appariement entre les nombres de Betti persistants.

Théorème 3.4. *Soient M, N deux variétés compactes, connexes et homéomorphes l'une avec l'autre. Soient aussi leurs fonctions de mesure, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de Morse. On notera m_0 et n_0 les minima respectifs de f sur M et de g sur N . Alors*

$$d(\tilde{\beta}_{S_{\mathbb{R}}f}^{q+1}, \tilde{\beta}_{S_{\mathbb{R}}g}^{q+1}) = d(\tilde{\beta}_f^q, \tilde{\beta}_g^q), \quad q \geq -1. \quad (9)$$

Pour la distance d'appariement entre nombres de Betti persistants non réduits :

$$d(\beta_{S_{\mathbb{R}}f}^{q+1}, \beta_{S_{\mathbb{R}}g}^{q+1}) = d(\beta_f^q, \beta_g^q), \quad q \geq 1, \quad (10)$$

$$d(\beta_{S_{\mathbb{R}}f}^1, \beta_{S_{\mathbb{R}}g}^1) \leq d(\beta_f^0, \beta_g^0), \quad (11)$$

et

$$d(\beta_{S_{\mathbb{R}}f}^0, \beta_{S_{\mathbb{R}}g}^0) = |m_0 - n_0|. \quad (12)$$

De plus, si $m_0 = n_0$, nous avons que

$$d(\beta_{S_{\mathbb{R}}f}^{q+1}, \beta_{S_{\mathbb{R}}g}^{q+1}) = \begin{cases} d(\beta_f^q, \beta_g^q) & \text{si } q \geq 0, \\ 0 & \text{si } q = -1 \end{cases}. \quad (13)$$

Ces formules sont aussi valides pour $\Sigma_{\mathbb{R}}f$ and $\Sigma_{\mathbb{R}}g$.

Démonstration. Les équations (9) et (10) sont des corollaires directs, respectivement, de (5) et (6). L'équation (12), quant à elle, est dérivée de (8), cette dernière équation signifiant que le diagramme de persistance de $\beta_{S_{\mathbb{R}}f}^0$ possède un seul point, soit un point à l'infini avec m_0 comme abscisse. De même, le diagramme de $\beta_{S_{\mathbb{R}}g}^0$ possède seulement un point à l'infini avec abscisse n_0 . Il en suit que $d(\beta_{S_{\mathbb{R}}f}^0, \beta_{S_{\mathbb{R}}g}^0) = |m_0 - n_0|$.

Pour prouver l'équation (11), notez qu'en vertu de (7), les diagrammes de β_f^0 and $\beta_{S_{\mathbb{R}}f}^1$ ne diffèrent qu'en ceci que le premier a un point à l'infini avec abscisse m_0 que le second n'a pas. De même, le diagramme de β_g^0 possède un point à l'infini avec abscisse n_0 non présent dans celui de $\beta_{S_{\mathbb{R}}g}^1$. Ainsi, le calcul de $d(\beta_{S_{\mathbb{R}}f}^1, \beta_{S_{\mathbb{R}}g}^1)$ se fait sur des sous-ensembles propres des ensembles de points utilisés dans le calcul de $d(\beta_f^0, \beta_g^0)$. L'équation (11) en découle directement. Par

contre, si $m_0 = n_0$, ces deux points à l'infini, étant distants l'un de l'autre de 0, seront appariés dans la bijection optimale entre les diagrammes de β_f^0 et β_g^0 et n'influenceront pas la valeur de $d(\beta_f^0, \beta_g^0)$. De cet argument, ainsi que des équations (10) et (12), on conclut à la validité de (13). \square

Pour ce qui est de la distance d'appariement multidimensionnelle, le résultat suivant devrait être vrai.

Conjecture 3.5. *Soient M, N deux variétés compactes, connexes et homéomorphes l'une avec l'autre. Soient aussi leurs fonctions de mesure, $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ et $g : N \rightarrow \mathbb{R}^k$ deux fonctions dont les composantes sont des fonctions de Morse. Alors*

$$D(\tilde{\beta}_{S_{\mathbb{R}f}}^{q+1}, \tilde{\beta}_{S_{\mathbb{R}g}}^{q+1}) = D(\tilde{\beta}_f^q, \tilde{\beta}_g^q), \quad q \geq 0. \quad (14)$$

Pour la distance d'appariement k -dimensionnelle entre les nombres de Betti persistants non réduits :

$$D(\beta_{S_{\mathbb{R}f}}^{q+1}, \beta_{S_{\mathbb{R}g}}^{q+1}) = D(\beta_f^q, \beta_g^q), \quad q \geq 1, \quad (15)$$

et

$$D(\beta_{S_{\mathbb{R}f}}^1, \beta_{S_{\mathbb{R}g}}^1) \leq D(\beta_f^0, \beta_g^0). \quad (16)$$

La conjecture 3.5, bien qu'étant probablement vraie, ne semble pas pouvoir être démontrée de manière aisée. Par contre, une preuve existe dans le cas où f et g sont des *interpolations par axes* [CEF⁺] de données définies sur les sommets de triangulations. Le lecteur est invité à consulter [EK] pour plus de détails.

4 Exemples numériques

Les exemples numériques décrits dans cette section ont été obtenus avec des fonctions de mesure bidimensionnelles. Nous notons que dans ce cas l'ensemble des paires admissibles Adm_2 est composé des couples $((a, 1-a), (b, -b))$ tels que $a \in (0, 1)$ et $b \in \mathbb{R}$. Pour un complexe simplicial \mathcal{K} , nous noterons $\mathcal{V}(\mathcal{K})$ l'ensemble de ses sommets, et nous considérerons sa *suspension simpliciale* $S(\mathcal{K})$ dont l'ensemble des sommets est $\mathcal{V}(\mathcal{K})$ union deux points disjoints w_0 et w_1 , et dont les simplexes sont ceux de \mathcal{K} auxquels, pour tout simplexe $[v_0, \dots, v_d]$ dans \mathcal{K} , on ajoute $[v_0, \dots, v_d, w_0]$ et $[v_0, \dots, v_d, w_1]$. Il est connu que si \mathcal{K} est une triangulation de la variété M , alors $S(\mathcal{K})$ est une triangulation de SM . Pour une fonction de mesure $\varphi : \mathcal{V}(\mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$, nous noterons $S_{\mathbb{R}\varphi} = (S_{\mathbb{R}\varphi_1}, S_{\mathbb{R}\varphi_2}) : \mathcal{V}(S(\mathcal{K})) \rightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction telle que $S_{\mathbb{R}\varphi_i}(v) = \varphi_i(v)$ pour tout sommet v de \mathcal{K} et $S_{\mathbb{R}\varphi_i}(w_j) = m_{i,0}$, $j = 0, 1$, $m_{i,0}$ étant le minimum absolu de φ_i sur $\mathcal{V}(\mathcal{K})$. Nous utiliserons aussi les notations $\Phi_{(a,b)}$ pour $\text{red}_{((a,1-a),(b,-b))}^\varphi$ et $S_{\mathbb{R}}\Phi_{(a,b)}$ pour $\text{red}_{((a,1-a),(b,-b))}^{S_{\mathbb{R}\varphi}}$.

Nos exemples sont destinés à procurer un support expérimental à la théorie décrite dans la section 3. Nous avons utilisé deux paires de modèles, chacun d'entre eux étant un complexe simplicial en dimension 1 ou 2, homéomorphe à une variété compacte et connexe. Nos résultats ont été obtenus à l'aide d'une

implantation de l'algorithme décrit dans [BCFG11] servant à calculer des bornes inférieures pour la distance d'appariement bidimensionnelle entre des nombres de Betti persistants avec une précision croissante. Cet algorithme, prenant en entrée des paires (K, φ) et (L, ψ) , calcule $d(\beta_{\Phi_{(a,b)}}, \beta_{\Psi_{(a,b)}})$, où (a, b) est choisi sur des grilles de plus en plus fines jusqu'à ce que la tolérance requise soit atteinte. Notre implantation (codée en Java avec l'aide de N. Cavazza, co-auteur de [CEF⁺]) intègre le logiciel d'homologie persistante JPLex [dSCVJ] dans l'étape du calcul des nombres de Betti persistants.

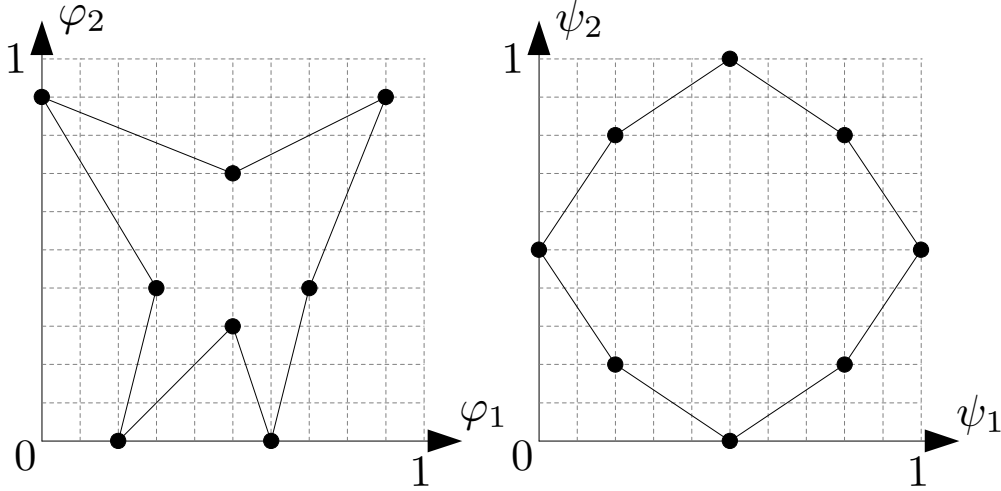


FIGURE 5 – Paire de modèles pour l'exemple 1D. Les fonctions de mesure sont les fonctions de coordonnées x et y .

Exemple 4.1. L'exemple 1D est la paire de modèles (K, φ) et (L, ψ) montrés à la figure 5. Tel qu'illustré, φ_1 et ψ_1 , ainsi que φ_2 et ψ_2 , atteignent le même minimum global (dans les deux cas 0), alors nous nous attendons à ce que l'équation (13) soit vérifiée. Les distances d'appariement 2D sont calculées avec une tolérance $\epsilon = 0,01$, mais vu la simplicité de l'exemple, la probabilité est très forte qu'elles soient en fait exactes. Les résultats de nos calculs peuvent être consultés dans les deux tableaux suivants :

	β	$\tilde{\beta}$		$q = 0$	$q = 1$
$d(\beta_{\varphi_1}^0, \beta_{\psi_1}^0)$	0,05	0,05	$d(\beta_{S_{\mathbb{R}}\varphi_1}^q, \beta_{S_{\mathbb{R}}\psi_1}^q)$	0	0,05
$d(\beta_{\varphi_2}^0, \beta_{\psi_2}^0)$	0,15	0,15	$d(\beta_{S_{\mathbb{R}}\varphi_2}^q, \beta_{S_{\mathbb{R}}\psi_2}^q)$	0	0,15
$D(\beta_{\varphi}^0, \beta_{\psi}^0)$	0,2	0,15	$D(\beta_{S_{\mathbb{R}}\varphi}^q, \beta_{S_{\mathbb{R}}\psi}^q)$	0,1	0,15

Tel que montré dans l'exemple, il n'est pas garanti que $D(\beta_{S_{\mathbb{R}}\varphi}^0, \beta_{S_{\mathbb{R}}\psi}^0)$ égale 0 même si φ_i et ψ_i atteignent le même minimum global pour $i = 1, 2$. Les résultats pour les nombres de Betti persistants réduits dans le cas des modèles suspendus n'ont pas été inclus dans le tableau, puisqu'ils égalent ceux pour les nombres de Betti persistants non réduits. Ceci n'est cependant pas nécessairement vrai en

général. La figure 6 montre additionnellement les graphiques de $d(\beta_{\Phi(a,b)}^q, \beta_{\Psi(a,b)}^q)$ et de $d(\beta_{\mathbb{S}_{\mathbb{R}}\Phi(a,b)}^q, \beta_{\mathbb{S}_{\mathbb{R}}\Psi(a,b)}^q)$, considérés comme fonctions de a et b , pour quelques valeurs intéressantes de q .

Exemple 4.2. Le modèle 2D est illustré à la figure 7. La fonction de mesure $\varphi : \mathcal{V}(\mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ est définie de la manière suivante : supposons que $\mathcal{V}(\mathcal{K}) = \{v_1, \dots, v_n\}$ et que c est le centre de masse de K défini comme moyenne pondérée des barycentres de chaque triangle. Nous définissons un vecteur principal

$$\vec{w} = \frac{\sum_{i=1}^n (v_i - c) \|v_i - c\|_2}{\sum_{i=1}^n \|v_i - c\|_2^2}$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne. Soit maintenant d la droite passant par c et ayant \vec{w} comme vecteur directeur, et π le plan passant par c et ayant \vec{w} comme vecteur normal. La fonction φ est définie comme

$$\varphi_1(v_i) = 1 - \frac{\text{dist}(v_i, d)}{\max_{j=1, \dots, n} \text{dist}(v_j, d)}$$

et

$$\varphi_2(v_i) = 1 - \frac{\text{dist}(v_i, \pi)}{\max_{j=1, \dots, n} \text{dist}(v_j, \pi)},$$

où dist est la distance euclidienne entre un point et la droite d ou le plan π . La fonction de mesure ψ est définie de manière équivalente sur l'ensemble des sommets $\mathcal{V}(\mathcal{L})$. Une conséquence directe de ces définitions est que les minima globaux de φ_1 , φ_2 , ψ_1 and ψ_2 seront tous 0. La table 1 montre les résultats de nos calculs. Toutes les bornes inférieures calculées pour la distance d'appariement 2D sont présentées, dans le but d'illustrer la comparabilité des résultats entre le modèle original et le modèle suspendu à chaque étape de l'algorithme.

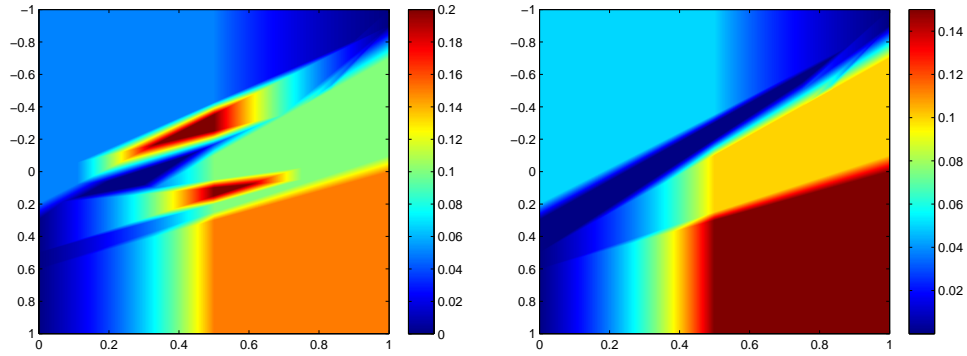


FIGURE 6 – Première image : graphique de $d(\beta_{\Phi(a,b)}^0, \beta_{\Psi(a,b)}^0)$. Deuxième image : graphique de $d(\tilde{\beta}_{\Phi(a,b)}^0, \tilde{\beta}_{\Psi(a,b)}^0)$, qui est identique à celui de $d(\beta_{\mathbb{S}_{\mathbb{R}}\Phi(a,b)}^1, \beta_{\mathbb{S}_{\mathbb{R}}\Psi(a,b)}^1)$, tel qu'attendu selon l'équation (9). L'axe horizontal correspond à a , l'axe vertical à b .

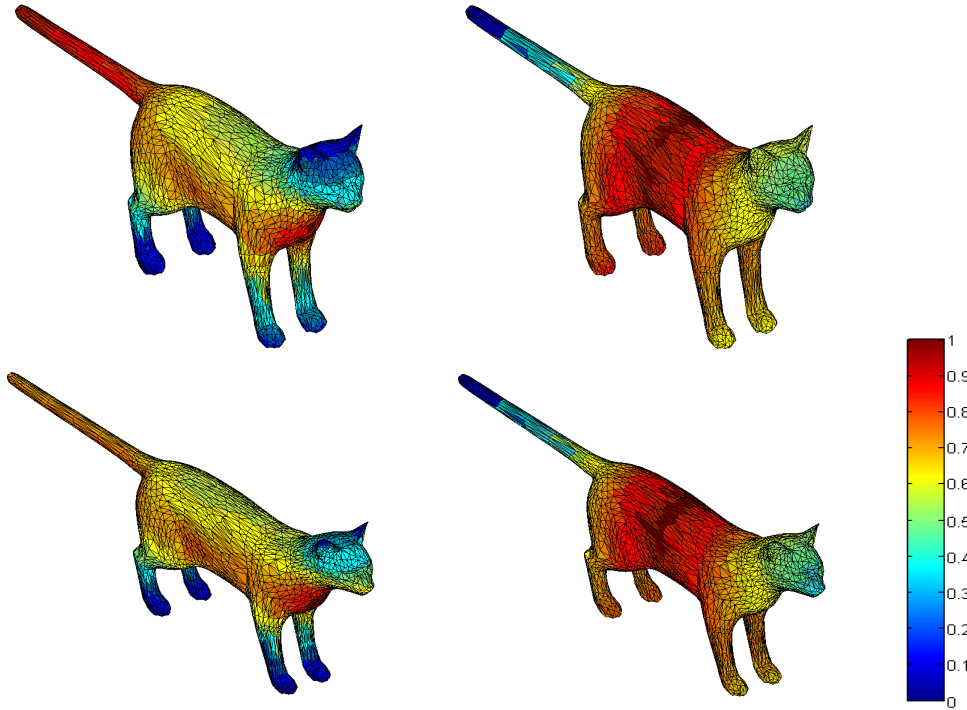


FIGURE 7 – Première rangée : modèle K et fonctions de mesure φ_1 et φ_2 . Deuxième rangée : modèle L et fonctions de mesure ψ_1 et ψ_2 . Remerciements aux auteurs de [BCFG11] pour nous avoir fourni les modèles.

	ϵ			ϵ	
$d(\beta_{\varphi_1}^0, \beta_{\psi_1}^0)$		0,118 165	$d(\tilde{\beta}_{\varphi_1}^0, \tilde{\beta}_{\psi_1}^0)$		0,118 165
$d(\beta_{\varphi_2}^0, \beta_{\psi_2}^0)$		0,032 043	$d(\tilde{\beta}_{\varphi_2}^0, \tilde{\beta}_{\psi_2}^0)$		0,032 043
$D(\beta_{\varphi}^0, \beta_{\psi}^0)$	9/8	0,194 217	$D(\tilde{\beta}_{\varphi}^0, \tilde{\beta}_{\psi}^0)$	9/8	0,118 165
	9/16	0,224 227		9/16	0,127 301
	9/32	0,225 394		9/32	0,135 530
	9/64	0,225 394		9/64	0,144 274

	ϵ			ϵ	
$d(\beta_{\varphi_1}^1, \beta_{\psi_1}^1)$		0,031 129	$d(\beta_{S_{\mathbb{R}}\varphi_1}^1, \beta_{S_{\mathbb{R}}\psi_1}^1)$		0,118 165
$d(\beta_{\varphi_2}^1, \beta_{\psi_2}^1)$		0,039 497	$d(\beta_{S_{\mathbb{R}}\varphi_2}^1, \beta_{S_{\mathbb{R}}\psi_2}^1)$		0,032 043
$D(\beta_{\varphi}^1, \beta_{\psi}^1)$	9/8	0,039 497	$D(\beta_{S_{\mathbb{R}}\varphi}^1, \beta_{S_{\mathbb{R}}\psi}^1)$	9/8	0,118 165
	9/16	0,046 150		9/16	0,127 301
	9/32	0,046 150		9/32	0,135 530
	9/64	0,046 150		9/64	0,144 274

	ϵ			ϵ	
$d(\beta_{S_{\mathbb{R}}\varphi_1}^2, \beta_{S_{\mathbb{R}}\psi_1}^2)$		0,031 129	$d(\beta_{S_{\mathbb{R}}\varphi_1}^0, \beta_{S_{\mathbb{R}}\psi_1}^0)$		0,000 000
$d(\beta_{S_{\mathbb{R}}\varphi_2}^2, \beta_{S_{\mathbb{R}}\psi_2}^2)$		0,039 497	$d(\beta_{S_{\mathbb{R}}\varphi_2}^0, \beta_{S_{\mathbb{R}}\psi_2}^0)$		0,000 000
$D(\beta_{S_{\mathbb{R}}\varphi}^2, \beta_{S_{\mathbb{R}}\psi}^2)$	9/8	0,039 497	$D(\beta_{S_{\mathbb{R}}\varphi}^0, \beta_{S_{\mathbb{R}}\psi}^0)$	9/8	0,155 527
	9/16	0,046 150		9/16	0,171 368
	9/32	0,046 150		9/32	0,179 821
	9/64	0,046 150		9/64	0,194 217

TABLE 1 – Deux premiers tableaux : résultats pour modèles originaux avec β_0 et $\tilde{\beta}_0$. Troisième tableau : résultats pour modèles originaux avec β_1 . Trois derniers tableaux : résultats pour modèles suspendus avec β_1 , β_2 et β_0 . Résultats pour modèles suspendus avec $\tilde{\beta}_0$ identiques au sixième tableau.

Références

- [BCF⁺08] S. BIASOTTI, A. CERRI, P. FROSINI, D. GIORGI et C. LANDI : Multidimensional size functions for shape comparison. *J. Math. Imaging Vision*, 32(2):161–179, 2008.
- [BCFG11] S. BIASOTTI, A. CERRI, P. FROSINI et D. GIORGI : A new algorithm for computing the 2-dimensional matching distance between size functions. *Pattern Recognition Letters*, 32:1735–1746, 2011.
- [CEF⁺] N. CAVAZZA, M. ETHIER, P. FROSINI, C. LANDI et T. KACZYNSKI : Comparison of persistent homologies for vector functions : from continuous to discrete and back. <http://arxiv.org/abs/1201.3217>.
- [dFL06] M. D’AMICO, P. FROSINI et C. LANDI : Using matching distance in size theory : a survey. *Int. J. Imaging Syst. Technol.*, 16(5):154–161, 2006.
- [dSCVJ] V. de SILVA, G. CARLSSON et M. VEJDEMO JOHANSSON : Plex : A system for computational homology. <http://comp-top.stanford.edu/u/programs/jplex/>.
- [EK] M. ETHIER et T. KACZYNSKI : Suspension of a measuring function. Prépublication septembre 2012.
- [Hat02] A. HATCHER : *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [KMM04] T. KACZYNSKI, K. MISCHAIKOW et M. MROZEK : *Computational Homology*. Numéro 157 de Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, 1^{re} édition, 2004.
- [Mun84] J. MUNKRES : *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley, 1984.

MARC ETHIER
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Courriel: marc.ethier@usherbrooke.ca