

# Classification des représentations indécomposables du carquois de Kronecker

Tanna Sánchez McMillan

Reçu le 2013-07-01 et accepté le 2017-01-13

**RÉSUMÉ** On considère le carquois de Kronecker  $\mathbf{K}_2$  ayant deux sommets et deux flèches parallèles qui pointent vers la même direction. Soit  $M = (E_1, E_2, f, g)$  une représentation de  $\mathbf{K}_2$ , où  $E_1, E_2$  sont des  $k$ -espaces vectoriels et  $f$  et  $g$  des applications  $k$ -linéaires allant de  $E_2$  vers  $E_1$ . Dans cet article, on démontre qu'on peut classifier les représentations indécomposables de  $\mathbf{K}_2$  en trois classes.

## 1 Introduction

La théorie de représentations se penche sur l'étude des structures algébriques, telles que les algèbres, par voie de l'analyse de leurs représentations. Dans ce sens, actuellement, les carquois s'avèrent un outil essentiel à la théorie des représentations des algèbres. Plus précisément, à chaque algèbre de dimension finie, sobre et connexe sur un corps  $k$  algébriquement clos lui correspond un carquois et vice-versa. De plus, en se servant d'un carquois, on peut visualiser les modules sur l'algèbre associée comme un ensemble de  $k$ -espaces vectoriels, un pour chaque sommet du carquois, liés entre eux par des applications linéaires, une pour chaque flèche dans le carquois vérifiant éventuellement des conditions supplémentaires. Ce qu'on vient de décrire est ce qu'on appelle une représentation de carquois.

Toute représentation non nulle d'un carquois fini  $Q$  peut, en vertu du théorème de Krull-Schmidt, être décomposée en somme directe finie de représentations indécomposables - soit, des représentations qui ne sont pas isomorphes à la somme directe finie de deux représentations non nulles. De plus, cette décomposition en représentations indécomposables est unique à isomorphisme près. Ainsi, si on comprend toutes les représentations indécomposables d'un carquois  $Q$  et les morphismes qui agissent entre eux, on peut comprendre la catégorie des représentations de  $Q$ .

En ce qui concerne, en particulier, le carquois de Kronecker, on connaît depuis 1946 [Die46] les classes de ses représentations indécomposables. Plus récemment, on trouve dans [ARO97] cette même classification obtenue en se servant de la

---

Je tiens à remercier le professeur Ibrahim Assem pour son soutien et ses conseils, ainsi que Juan Carlos Bustamante pour prendre le temps de répondre à mes questions.

14 Classification des représentations indécomposables du carquois de Kronecker  
théorie des représentations d'algèbres héréditaires et du carquois d'Auslander-Reiten.

Dans un premier temps, à la Section 2, on introduit les notions de théorie de représentations de carquois nécessaires à la classification. Cette partie ne prétend être qu'une invitation à l'étude plus approfondie de cette théorie. Dans un deuxième temps, à la Section 3, on présente une reformulation de la preuve du théorème de classification des représentations indécomposables de  $\mathbf{K}_2$  décrite dans [Bur86].

## 2 Représentations de carquois

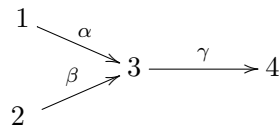
Dans cette section, nous introduisons les concepts de base de théorie de représentations de carquois essentiels à la compréhension de la preuve présentée à la Section 3. Nous référons le lecteur à [Sch14] et [ASS06] pour des plus amples explications à ce sujet. Ici,  $k$  représentera un corps algébriquement clos.

### 2.1 Définitions et préliminaires

**Définition 2.1.** Un *carquois* est un quadruplet  $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$  formé de deux ensembles  $Q_0$  et  $Q_1$ , dont les éléments sont appelés respectivement les *sommets* et les *flèches* de  $Q$ , et de deux applications  $s, b : Q_1 \rightarrow Q_0$  qui associent à chaque flèche  $\alpha \in Q_1$  sa *source*  $s(\alpha)$ , et son *but*  $b(\alpha)$ , dans  $Q_0$ . On dit que  $Q$  est *fini* si  $Q_0$  et  $Q_1$  sont des ensembles finis.

**Définition 2.2.** Soit  $Q$  un carquois et  $i, j \in Q_0$ . Un *chemin*  $c$  de  $i$  vers  $j$  de longueur  $l$  dans  $Q$  est une suite  $c = (i | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l | j)$  avec  $\alpha_n \in Q_1$  pour tout  $n = 1, 2, \dots, l$  tel que  $s(\alpha_1) = i$ ,  $s(\alpha_n) = b(\alpha_{n-1})$  pour tout  $n = 2, 3, \dots, l$  et  $b(\alpha_l) = j$ .

**Exemple 2.3.** Dans le carquois  $Q$  donné par



on a que  $Q_0 = \{1, 2, 3, 4\}$  et  $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ . Pour ce qui est des applications source et but,  $s(\alpha) = 1$ ,  $b(\alpha) = b(\beta) = s(\gamma) = 3$ ,  $s(\beta) = 2$  et  $b(\gamma) = 4$ .

**Définition 2.4.** Une *représentation*  $M = (E_i, \phi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$  d'un carquois  $Q$  est telle que :

1. À chaque sommet  $i$  de  $Q$  est associé un  $k$ -espace vectoriel  $E_i$ .
2. À chaque flèche  $\alpha : i \rightarrow j$  de  $Q$  est associée une application  $k$ -linéaire  $\phi_\alpha : E_i \rightarrow E_j$ .

De plus, une représentation  $M = (E_i, \phi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$  est dite *nulle* (ou *zéro*) si  $E_i = 0$  pour tout  $i \in Q_0$ .

**Exemple 2.5.** Soit  $Q$  le carquois donné par

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3.$$

Donc,

$$M = (k \xrightarrow{1} k \xleftarrow{0} 0)$$

$$\text{et } M' = (k \xrightarrow{\binom{1}{0}} k^2 \xleftarrow{\binom{0}{1}} k)$$

sont deux représentations de  $Q$ .

**Définition 2.6.** Soit  $i$  un sommet d'un carquois  $Q$ .

1. La *représentation simple*  $S(i)$  de  $Q$  au sommet  $i$  est donnée par

$$S(i) = (S(i)_j, \phi_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$$

où

$$S(i)_j = \begin{cases} k & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. La *représentation projective*  $P(i)$  de  $Q$  au sommet  $i$  est donnée par  $P(i) = (P(i)_j, \phi_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ , où  $P(i)_j$  est le  $k$ -espace vectoriel dont la base est l'ensemble de tous les chemins de  $i$  à  $j$  dans  $Q$  et  $\phi_\alpha : P(i)_j \rightarrow P(i)_l$  est l'application linéaire définie par la composition de chemins de  $i$  à  $j$  avec la flèche  $\alpha$  qui va de  $j$  à  $l$ .
3. La *représentation injective*  $I(i)$  de  $Q$  au sommet  $i$  est donnée par  $I(i) = (I(i)_j, \phi_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ , où  $I(i)_j$  est le  $k$ -espace vectoriel dont la base est l'ensemble de tous les chemins de  $j$  à  $i$  dans  $Q$  et  $\phi_\alpha : I(i)_j \rightarrow I(i)_l$  est l'application linéaire définie en enlevant la flèche  $\alpha$  des chemins de  $j$  à  $i$  qui commencent par  $\alpha$  et en envoyant vers zéro tous les chemins qui ne commencent pas par  $\alpha$ .

**Exemple 2.7.** Soit  $Q$  le carquois de l'Exemple 2.5. Donc,

$$S(1) = (k \longrightarrow 0 \longleftarrow 0)$$

$$P(3) = (0 \longrightarrow k \xleftarrow{1} k)$$

$$I(2) = (k \xrightarrow{1} k \xleftarrow{1} k)$$

**Définition 2.8.** Soit  $Q$  un carquois et soient  $M = (E_i, \phi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ ,  $M' = (E'_i, \phi'_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$  deux représentations de  $Q$ . Un *morphisme de représentations*  $f : M \rightarrow M'$  est une famille  $(f_i)_{i \in Q_0}$  d'applications linéaires  $f_i : E_i \rightarrow E'_i$  telle que, pour toute flèche  $\alpha : i \rightarrow j$  dans  $Q_1$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_i & \xrightarrow{\phi_\alpha} & E_j \\ f_i \downarrow & & \downarrow f_j \\ E'_i & \xrightarrow{\phi'_\alpha} & E'_j \end{array}$$

commute, c'est-à-dire,  $f_j \circ \phi_\alpha(m) = \phi'_\alpha \circ f_i(m)$  pour tout  $m \in E_i$ .

**Exemple 2.9.** Soient  $M = (k \xrightarrow[\begin{smallmatrix} (0) \\ (1) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} (1) \\ (0) \end{smallmatrix}} k^2)$  et  $M' = (k \xrightarrow[\begin{smallmatrix} (1) \\ (0) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} (1) \\ (0) \end{smallmatrix}} k^2)$  deux représentations du carquois  $2 \xrightarrow[\beta]{\alpha} 1$ . Ainsi,  $f = (f_1, f_2) : M \rightarrow M'$  donné par

$$\begin{array}{ccc} k \xrightarrow[\begin{smallmatrix} (0) \\ (1) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} (1) \\ (0) \end{smallmatrix}} k^2 & & \\ f_1=1 \downarrow & & \downarrow f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ k \xrightarrow[\begin{smallmatrix} (1) \\ (0) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} (1) \\ (0) \end{smallmatrix}} k^2 & & \end{array}$$

est un morphisme de représentations. En effet, on peut vérifier que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Définition 2.10.** Un morphisme  $f = (f_i) : M \rightarrow M'$  de deux représentations d'un carquois  $Q$  est *injectif* (*surjectif*) si  $f_i$  est injective (surjective) pour tout  $i \in Q_0$ . De même,  $f$  est un *isomorphisme* si  $f_i$  est bijective pour tout  $i \in Q_0$ . D'ailleurs, on note  $\text{Hom}(M, M')$  l'ensemble de tous les morphismes allant de  $M$  vers  $M'$ . Cet ensemble est un  $k$ -espace vectoriel pour la somme de morphismes et la multiplication par des scalaires. Un morphisme  $f : M \rightarrow M$  est appelé un *endomorphisme* et l'espace vectoriel d'endomorphismes de  $M$  est noté  $\text{End}(M)$ . De plus, pour la composition de morphismes,  $\text{End}(M)$  est une  $k$ -algèbre associative. En outre, une représentation  $L$  d'un carquois  $Q$  est appelée *sous-représentation* d'une représentation  $M$  s'il existe un morphisme injectif  $i : L \hookrightarrow M$ .

**Définition 2.11.** Soient  $M = (E_i, \phi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$  et  $M' = (E'_i, \phi'_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$  deux représentations de  $Q$ . Alors,

$$M \oplus M' = \left( E_i \oplus E'_i, \begin{pmatrix} \phi_\alpha & 0 \\ 0 & \phi'_\alpha \end{pmatrix} \right)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$$

est une représentation de  $Q$  qui s'appelle *somme directe* de  $M$  et  $M'$ . Par récurrence, on définit la somme directe d'un nombre fini de représentations  $M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_t = (M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_{t-1}) \oplus M_t$ .

**Exemple 2.12.** Prenons les représentations  $M$  et  $M'$  de  $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3$  dans l'Exemple 2.5. Alors, la somme directe  $M \oplus M'$  est la représentation

$$k \oplus k \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} k \oplus k^2 \xleftarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} k$$

qui est isomorphe à

$$k^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} k^3 \xleftarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} k$$

**Définition 2.13.** Une représentation non nulle  $M$  de  $Q$  est dite *indécomposable* si  $M = N \oplus L$ , avec  $N$  et  $L$  aussi des représentations de  $Q$ , implique que  $N = 0$  ou  $L = 0$ .

On rappelle au lecteur qu'une algèbre est dite locale lorsque tous ses éléments non inversibles forment un idéal. De façon équivalente, un élément d'une algèbre locale est soit inversible soit nilpotent. On trouve une preuve détaillée du théorème classique suivant dans [Sch14, p.126], [ASS06, p.22].

**Théorème 2.14.** *Soit  $M$  une représentation de  $Q$ . Alors,  $M$  est indécomposable si et seulement si  $\text{End}(M)$ , vue en tant qu'algèbre, est locale.*

## 2.2 Carquois de Kronecker

Le carquois  $\mathbf{K}_2$  qui est le sujet principal de cet article est le carquois de Kronecker à deux flèches

$$2 \xrightleftharpoons[\beta]{\alpha} 1.$$

On voit que  $(\mathbf{K}_2)_0 = \{1, 2\}$ ,  $(\mathbf{K}_2)_1 = \{\alpha, \beta\}$ ,  $s(\alpha) = s(\beta) = 2$  et  $b(\alpha) = b(\beta) = 1$ . De plus,

$$\begin{aligned} S(1) &= (0 \xrightarrow{\alpha} k) = P(1), & I(1) &= (k^2 \xrightarrow{\beta} k), \\ S(2) &= (k \xrightarrow{\alpha} 0) = I(2), & P(2) &= (k \xrightarrow{\beta} k^2) \end{aligned}$$

sont ses représentations simples, projectives et injectives.

On présente maintenant quelques représentations de  $\mathbf{K}_2$  pertinentes pour la preuve du théorème de classification.

Pour  $n \geq 1$ , on note  $\bar{P}^n$  la représentation  $k^n \xrightleftharpoons[g]{f} k^{n+1}$  appelée *postprojective*. Dans celle-ci, l'espace vectoriel  $E_2$  est de dimension  $n$  et l'espace vectoriel  $E_1$  de dimension  $n+1$ . On fixe une base  $\{u_1, \dots, u_n\}$  de  $E_2$  et une base  $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$  de  $E_1$  et on définit  $f$  et  $g$  telles que  $f(u_i) = v_i$ ,  $g(u_i) = v_{i+1}$ . Remarquons que, puisque l'image par  $f$  ou  $g$  d'une base de  $E_2$  est un ensemble linéairement indépendant de  $E_1$ , ces applications sont injectives. On définit ensuite, pour  $n \geq 1$ , la représentation dite *préinjective*  $k^{n+1} \xrightleftharpoons[g]{f} k^n$  qu'on note  $\bar{Q}^n$ . Pour cette représentation,  $f$  et  $g$  sont telles que  $f(u_1) = g(u_{n+1}) = 0$ ,  $f(u_i) = v_{i-1}$  pour tout  $i \in \{2, \dots, n+1\}$  et  $g(u_i) = v_i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Proposition 2.15.** *Les représentations  $\bar{P}^n$  et  $\bar{Q}^n$  de  $\mathbf{K}_2$  sont indécomposables.*

*Démonstration.* On montre que  $\bar{P}^n$  est indécomposable, car la preuve pour  $\bar{Q}^n$  est semblable. En vertu du Théorème 2.14, il suffit de montrer que  $\text{End}(\bar{P}^n)$  est locale. Soit  $h = (h_1, h_2)$  un endomorphisme de  $\bar{P}^n$  où  $h_1 : E_2 \rightarrow E_2$  et  $h_2 : E_1 \rightarrow E_1$  sont telles que  $h_1(u_i) = u_{i+k}$  et  $h_2(v_j) = v_{j+k}$  pour  $k \in \{0, 1, \dots, n+1\}$ . On peut vérifier que  $h_2 \circ f = f \circ h_1$  et  $h_2 \circ g = g \circ h_1$ . Les applications linéaires  $h_1$  et  $h_2$  peuvent être représentées par une matrice carré d'ordre  $n$  ayant des zéros partout sauf dans l'une de ses diagonales où les éléments sont tous des 1. Ainsi, si  $k = 0$ , dite matrice est la matrice identité et alors  $h$  est un isomorphisme. Si  $k \neq 0$ , la matrice est nilpotente. Donc,  $\text{End}(\bar{P}^n)$  est une algèbre locale.  $\square$

Fixons, maintenant, un entier  $n \geq 1$  et un  $\lambda \in k$ . Considérons le  $n \times n$  bloc de Jordan  $J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$ . On note  $H_\lambda^n = (k^n \xrightarrow[J_n(\lambda)]{I_n} k^n)$

et  $K_\lambda^n = (k^n \xrightarrow[I_n]{J_n(\lambda)} k^n)$  deux représentations de  $\mathbf{K}_2$  où  $I_n$  est la matrice identité. Les représentations  $H_\lambda^n$  et  $K_\lambda^n$  s'appellent *régulières*. On démontre que ces représentations sont indécomposables.

**Proposition 2.16.** *Les représentations  $H_\lambda^n$  et  $K_\lambda^n$  de  $\mathbf{K}_2$ , pour tous  $n \geq 1$  et  $\lambda \in k$ , sont indécomposables.*

*Démonstration.* Montrons que  $H_\lambda^n$  est indécomposable. Soit  $h = (A, B)$  un endomorphisme de  $H_\lambda^n$  où  $A$  et  $B$  sont des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $k$ .

$$\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow[J_n(\lambda)]{I_n} & k^2 \\ A \downarrow & & \downarrow B \\ k & \xrightarrow[J_n(\lambda)]{I_n} & k^2 \end{array}$$

On veut que  $A = B$  et que  $B J_n(\lambda) = J_n(\lambda) A$ . Soit  $A = B = [a_{i,j}]$  où  $a_{i,j} \in k$  (pour tout  $i, j$ ). On vérifie sans peine que l'égalité des produits matriciels  $B J_n(\lambda)$  et  $J_n(\lambda) A$  entraîne que  $A$  est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{3,1} & a_{2,1} & a_{1,1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n-1,1} & \dots & a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}.$$

On a donc que  $\text{End}(H_\lambda^n)$  est isomorphe à l'anneau  $R$  des matrices carrées d'ordre  $n$  de la forme ci-dessus. Ainsi,  $A$  est non inversible si et seulement si  $\det A = 0$ , si et seulement si  $a_{1,1} = 0$  et on peut vérifier que

$$I = \left\{ \left( \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{3,1} & a_{2,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n-1,1} & \dots & a_{2,1} & 0 \end{array} \right) \middle| a_{i,j} \in k \right\} \subseteq R$$

est un idéal de  $R$ . Ainsi,  $R$  est local et donc  $\text{End}(H_\lambda^n)$  l'est aussi. On prouve de même que  $K_\lambda^n$  est aussi une représentation indécomposable de  $\mathbf{K}_2$ .  $\square$

### 3 Classification des représentations indécomposables

Cette section représente le coeur de l'article. Nous y présentons la classification des représentations indécomposables de  $\mathbf{K}_2$ . Plus précisément, on démontre que toute représentation indécomposable de  $\mathbf{K}_2$  est soit postprojective, soit préinjective, soit régulière. En vertu du théorème de Krull-Schmidt (dont la preuve se trouve, par exemple, dans [Sch14, p.11]), une représentation se décompose de manière unique en une somme directe de représentations indécomposables, ceci à isomorphisme près et à l'ordre des facteurs près. Dans le but d'obtenir la classification, nous dresserons la liste complète, à isomorphisme près, des représentations indécomposables de  $\mathbf{K}_2$ . Pour y parvenir, on vise d'abord à mettre en évidence certains sous-espaces de  $E_1$  et de  $E_2$ .

Occupons-nous, d'abord, des cas triviaux.

**Lemme 3.1.** *Soit  $M = (E_2 \xrightarrow[f]{g} E_1)$  une représentation indécomposable de  $\mathbf{K}_2$ . Si  $M$  est non simple, on a que*

1.  $\text{Ker } f \cap \text{Ker } g = 0$
2.  $\text{Im } f + \text{Im } g = E_1$

*Démonstration.* 1. Posons  $F = \text{Ker } f \cap \text{Ker } g \neq 0$ . Il existe alors un facteur direct de  $M$  de la forme  $F \xrightarrow[f]{g} 0$ . Puisque  $M$  est indécomposable, alors

$$M = (F \xrightarrow[f]{g} 0) \text{ et } \dim F = 1. \text{ Par conséquent, } M \cong (k \xrightarrow{\quad} 0) \cong S(2).$$

2. Supposons  $\text{Im } f + \text{Im } g \subsetneq E_1$  et soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E_1$  tel que  $E_1 = F \oplus (\text{Im } f + \text{Im } g)$ . Il existe alors un facteur direct de  $M$  de la forme  $(0 \xrightarrow[f]{g} F)$  et donc  $M \cong (0 \xrightarrow{\quad} F) \cong S(1)$ .

$\square$

Remarquons qu'une représentation  $E_2 \xrightarrow[f]{g} E_1$  est indécomposable si et seulement si la représentation duale  $E_1^* \xrightarrow[g^*]{f^*} E_2^*$  est indécomposable. Ainsi, on peut, sans perte de généralité, limiter l'étude des représentations indécomposables à  $M = (E_2 \xrightarrow[f]{g} E_1)$  avec  $\dim E_2 \leq \dim E_1$ .

Soit  $M$  une telle représentation indécomposable non simple de  $\mathbf{K}_2$ . Supposons  $\dim E_2 = n$  et  $\dim E_1 = n + m$  avec  $m \in \mathbb{N}$ . Au vu du Lemme 3.1, on peut supposer dès ici, sans perte de généralité que  $\text{Ker } f \cap \text{Ker } g = 0$  et  $\text{Im } f + \text{Im } g = E_1$ . Notons  $d = \dim(\text{Ker } f)$  et  $d' = \dim(\text{Ker } g)$ . Finalement, soit  $W = \text{Im } f \cap \text{Im } g$  et  $V = f^{-1}(W) \cap g^{-1}(W)$  des sous-espaces vectoriels de  $E_1$  et  $E_2$  respectivement.

Notons que  $M$  a une sous-représentation de la forme  $V \xrightarrow[g_V]{f_V} W$  où  $f_V$  et  $g_V$  sont les restrictions de  $f$  et  $g$  à  $V$ . Le lemme qui suit fournit davantage d'information sur cette sous-représentation.

**Lemme 3.2.** *On a que*

a)  $\dim W = n - d - d' - m$

b)  $\dim V \geq n - d - d' - 2m$

*Démonstration.*

a) On a supposé que  $E_1 = \text{Im } f + \text{Im } g$ . Utilisant la formule de Grassmann, on a que

$$\dim E_1 = (\dim E_2 - \dim(\text{Ker } f)) + (\dim E_2 - \dim(\text{Ker } g)) - \dim W$$

alors,

$$n + m = (n - d) + (n - d') - \dim W$$

et donc,

$$\dim W = n - d + n - d' - n - m = n - d - d' - m.$$

b) On a que  $f f^{-1}(W) = W \cap \text{Im } f = W$  donc  $f : f^{-1}(W) \rightarrow W$  est surjective et

$$\begin{aligned} \dim f^{-1}(W) &= \dim W + \dim(\text{Ker } f) \\ &= (n - d - d' - m) + d \\ &= n - d' - m. \end{aligned}$$

De même,  $\dim g^{-1}(W) = n - d - m$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \dim f^{-1}(W) + \dim g^{-1}(W) &= n - d' - m + n - d - m \\ &= 2n - d' - d - 2m. \end{aligned}$$

Finalement,  $f^{-1}(W) + g^{-1}(W) \subseteq E_2$  et donc  $\dim(f^{-1}(W) + g^{-1}(W)) \leq n$ . Alors  $\dim f^{-1}(W) + \dim g^{-1}(W) - \dim(f^{-1}(W) \cap g^{-1}(W)) \leq n$ , c'est-à-dire  $(2n - d' - d - 2m) - \dim V \leq n$ , ce qui entraîne que  $\dim V \geq n - d - d' - 2m$ .  $\square$



Continuons l'identification de sous-espaces de  $E_2$ . Soient

- i)  $K = \text{Ker } f \cap V$  et  $K' = \text{Ker } g \cap V$  de dimensions respectives  $k$  et  $k'$  et
- ii)  $L$  et  $L'$  deux sous-espaces vectoriels de  $E_2$  tel que  $\text{Ker } f = L \oplus K$  et  $\text{Ker } g = L' \oplus K'$  avec  $\dim L = l$  et  $\dim L' = l'$ .

Ainsi,  $d = k + l$  et  $d' = k' + l'$ .

Du fait que  $L \cap V = L \cap \text{Ker } f \cap V = L \cap K = 0$ , on a que  $V \oplus L$  est un sous-espace de  $f^{-1}(W)$ . Nommons  $H$  le sous-espace de  $f^{-1}(W)$ , tel que  $f^{-1}(W) = V \oplus L \oplus H$  et  $r \geq 0$  tel que  $\dim V = n - d - d' - 2m + r$ . Conséquentement,

$$\begin{aligned} \dim H &= \dim f^{-1}(W) - \dim L - \dim V \\ &= (n - d' - m) - (d - k) - (n - d - d' - 2m + r) \\ &= k + m - r. \end{aligned}$$

On définit de même  $H'$  tel que  $g^{-1}(W) = V \oplus L' \oplus H'$  et donc  $\dim H' = k' + m - r$ .

**Lemme 3.3.** *La somme  $(V \oplus L \oplus H) + (L' \oplus H')$  est directe et sa dimension est  $n - r$ .*

*Démonstration.* Prenons  $x \in (V \oplus L \oplus H) \cap (L' \oplus H')$ , alors  $x \in V + L + H = f^{-1}(W)$  et  $x \in L' + H' \subseteq g^{-1}(W)$  et donc  $x \in V$ . Mais  $V \cap (L' \oplus H') = 0$  et ainsi  $x = 0$ , ce qui démontre que  $(V \oplus L \oplus H) + (L' \oplus H')$  est une somme directe. En outre,

$$\begin{aligned} \dim(V \oplus L \oplus H \oplus L' \oplus H') &= \dim V + \dim L + \dim H + \dim L' + \dim H' \\ &= (n - d - d' - 2m + r) + (d - k) + (d' - k') + (k + m - r) + (k' + m - r) \\ &= n - r. \end{aligned}$$

□

Maintenant, soit  $X$  un sous-espace vectoriel de  $E_2$  de dimension  $r$  tel que  $E_2 = V \oplus L \oplus H \oplus L' \oplus H' \oplus X$ , et  $Y = f(X) + g(X) \subseteq E_1$ . De plus, comme  $L \subseteq \text{Ker } f$ , on a que  $f(f^{-1}(W)) = f(H) + f(V)$ , car  $f^{-1}(W) = V \oplus L \oplus H$ , et puisque, comme démontré à la partie b) du Lemme 3.2,  $f f^{-1}(W) = W$ , on a  $f(H) + f(V) = W$ . De même,  $g(V) + g(H') = W$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} E_1 &= \text{Im } f + \text{Im } g \\ &= W + g(L) + f(L') + g(H) + f(H') + Y \end{aligned}$$

Soit  $s$  la somme des dimensions de ces derniers sous-espaces. Ainsi,  $\dim E_1 \leq s$ , c'est-à-dire,  $n + m \leq s$ . Par ailleurs,

$$s \leq (n - d - d' - m) + (d - k) + (d' - k') + (k + m - r) + (k' + m - r) + 2r = n + m.$$

22 Classification des représentations indécomposables du carquois de Kronecker

Par conséquent,  $s = n + m$  et on a, premièrement, que  $\dim Y = 2r$ , deuxièmement, que

$$f(L') \cong L'$$

$$f(H') \cong H'$$

$$g(L) \cong L$$

$$g(H) \cong H$$

sont des sous-espaces isomorphes et, finalement, que  $E_1 = W \oplus g(L) \oplus f(L') \oplus g(H) \oplus f(H') \oplus Y$ . On a ainsi réussi à décomposer  $E_1$  et  $E_2$  en somme directe de sous-espaces vectoriels.

$$E_1 = W \oplus g(L) \oplus f(L') \oplus g(H) \oplus f(H') \oplus Y$$

$$E_2 = V \oplus L \oplus L' \oplus H \oplus H' \oplus X$$

**Corollaire 3.4.** *Avec les notations ci-dessus, une représentation*

$M = (E_2 \begin{smallmatrix} f \\ \rightrightarrows \\ g \end{smallmatrix} E_1)$  *est une somme directe de quatre sous-représentations :*

a)  $L \begin{smallmatrix} \rightrightarrows \\ \rightrightarrows \\ \rightrightarrows \end{smallmatrix} g(L)$

b)  $L' \begin{smallmatrix} \rightrightarrows \\ \rightrightarrows \\ \rightrightarrows \end{smallmatrix} f(L')$

c)  $X \begin{smallmatrix} \rightrightarrows \\ \rightrightarrows \\ \rightrightarrows \end{smallmatrix} Y$

d)  $V \oplus H \oplus H' \begin{smallmatrix} \rightrightarrows \\ \rightrightarrows \\ \rightrightarrows \end{smallmatrix} W \oplus f(H') \oplus g(H)$

où les applications sont les restrictions de  $f$  et  $g$  aux sous-espaces correspondants.

Lorsque  $M$  est indécomposable,  $M$  est isomorphe à une de ces quatre représentations. Dans le lemme suivant, on considère les trois cas les plus simples.

**Lemme 3.5.** *On a que*

a) *Si*  $M = (L \begin{smallmatrix} \rightrightarrows \\ \rightrightarrows \\ \rightrightarrows \end{smallmatrix} g(L))$  *alors*  $M \cong K_0^1$

b) *Si*  $M = (L' \begin{smallmatrix} \rightrightarrows \\ \rightrightarrows \\ \rightrightarrows \end{smallmatrix} f(L'))$  *alors*  $M \cong H_0^1$

c) *Si*  $M = (X \begin{smallmatrix} \rightrightarrows \\ \rightrightarrows \\ \rightrightarrows \end{smallmatrix} Y)$  *alors*  $M \cong P(2)$

*Démonstration.*

a) Supposons que  $M = (L \begin{smallmatrix} \rightrightarrows \\ \rightrightarrows \\ \rightrightarrows \end{smallmatrix} g(L))$ . On sait que la restriction de  $f$  à  $L$  est zéro et, ainsi,  $M$  est indécomposable si et seulement si la dimension de  $L$  est 1.

b) Se démontre comme la partie a).

$$\begin{array}{ccccc}
V & \oplus & H & \oplus & H' \\
\downarrow f_V & & \downarrow g_H & & \downarrow f_{H'} \\
W & \oplus & g(H) & \oplus & f(H')
\end{array}$$

Figure 1 – Applications de la représentation  $M$ 

c) On a  $\dim Y = 2r = 2 \dim X$ . Par conséquent,  $Y = f(X) \oplus g(X)$ . Alors,  $M$  est indécomposable si et seulement si  $\dim X = 1$  et  $\dim Y = 2$ . Ainsi,

$$M = (k \begin{smallmatrix} \oplus \\ \oplus \end{smallmatrix} k^2) \cong P(2). \quad \square$$

Il ne reste à s'occuper que du dernier cas, soit

$$M = (V \oplus H \oplus H' \twoheadrightarrow W \oplus f(H') \oplus g(H)).$$

Remarquons que, dans ce cas, les sous-espaces  $X, Y, L$  et  $L'$  sont tous nuls et alors  $d = k$ ,  $d' = k'$  et  $r = 0$ . On a donc que

1.  $\dim V = n - d - d' - 2m$
2.  $\dim W = n - d - d' - m$
3.  $\dim H = k + m = d + m$
4.  $\dim H' = k' + m = d' + m$

De plus, puisque  $\text{Ker } f \subseteq f^{-1}(W) = V \oplus H$  et  $K \cap H \subseteq V \cap H = 0$ , alors  $\text{Ker } f \subseteq V$ . De même,  $\text{Ker } g \subseteq V$ . Le diagramme dans la Figure 1 montre comment agissent les applications dans  $M$ .

**Lemme 3.6.** *Soit  $M$  la représentation décrite dans la Figure 1. La sous-représentation  $V \twoheadrightarrow W$  est indécomposable.*

*Démonstration.* On veut montrer qu'une décomposition non triviale

$$(V \twoheadrightarrow W) \cong (V_1 \twoheadrightarrow W_1) \oplus (V_2 \twoheadrightarrow W_2)$$

entraîne une décomposition non triviale de  $M$ .

Observons d'abord que la somme  $f(V) + f(H)$  est directe. En effet, si  $f(v) = f(h)$  avec  $v \in V$ ,  $h \in H$ , on a  $h - v \in \text{Ker } f \subseteq V$ . Donc  $h \in V$  et par conséquent  $h = 0$ . On peut donc écrire  $W = f(V) \oplus f(H) \oplus W^*$  avec  $W^* \subseteq \text{Im } g$ . En outre,  $H \cap \text{Ker } f = 0$  entraîne que  $H$  est isomorphe à  $f(H)$ .

Par conséquent, la décomposition  $W = W_1 \oplus W_2$  donne les décompositions  $W_1 = f(V_1) \oplus W'_1$ ,  $W_2 = f(V_2) \oplus W'_2$  avec  $f(H) \subseteq W'_1 \oplus W'_2$ . Puisque  $H \cong f(H)$ , il existe deux sous-espaces  $U_1, U_2$  de  $H$  tels que  $H = U_1 \oplus U_2$  et on a  $f(U_1) \subseteq W'_1 \subseteq W_1$  et  $f(U_2) \subseteq W'_2 \subseteq W_2$ .

Soient  $W'_1, W'_2$  tels que  $W_1 = f(V_1) \oplus W'_1$  et  $W_2 = f(V_2) \oplus W'_2$ . On choisit une décomposition  $H = U_1 \oplus U_2$  telle que  $f(U_1) = W'_1 \subseteq W_1$  et  $f(U_2) = W'_2 \subseteq W_2$ . On aura, de même,  $H' = U'_1 \oplus U'_2$  telle que  $g(U'_1) \subseteq W_1$  et  $g(U'_2) \subseteq W_2$ . On obtient, ainsi, la décomposition non triviale en sommes directes

$$M \cong ((V_1 \oplus U_1 \oplus U'_1) \rightrightarrows (W_1 \oplus g(U_1) \oplus f(U'_1))) \oplus ((V_2 \oplus U_2 \oplus U'_2) \rightrightarrows (W_2 \oplus g(U_2) \oplus f(U'_2)))$$

□

On est maintenant en mesure de compléter la classification. Toujours en lien avec la représentation  $M = (V \oplus H \oplus H' \rightrightarrows W \oplus f(H') \oplus g(H))$ , considérons trois cas :

Premier cas Supposons que  $m = 0$ . Dans ce cas,  $\dim E_2 = \dim E_1 = n$ ,  $\dim V = \dim W = n - d - d'$ ,  $\dim H = d$  et  $\dim H' = d'$ .

**Lemme 3.7.** *Si  $m = 0$ , alors au moins l'une de  $f$  et  $g$  est un isomorphisme.*

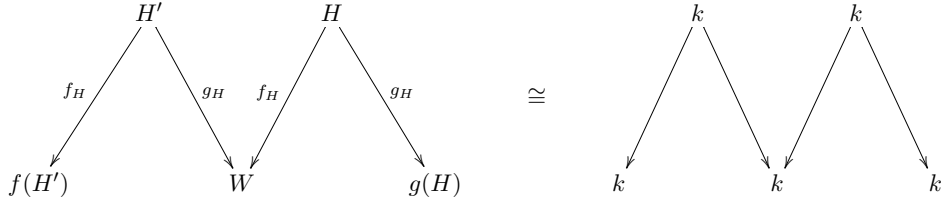
*Démonstration.* Procédons par récurrence sur  $n$ . Si  $n = 1$ , l'énoncé est trivial. Supposons alors que  $n > 1$ .

- Si  $d = d' = 0$ , alors  $\text{Ker } f = \text{Ker } g = 0$ . Puisque  $f$  et  $g$  sont injectives et  $\dim E_2 = \dim E_1$ , ce sont des isomorphismes.
- Si  $d + d' > 0$ , en vertu du Lemme 3.6,  $V \rightrightarrows W$  est indécomposable et on a  $\dim V = \dim W < n$ . En vertu de l'hypothèse de récurrence, l'une des restrictions de  $f$  et  $g$  à  $V$  est un isomorphisme. Supposons que  $f_V$  est un isomorphisme, alors  $f^{-1}(W) = V$  et donc  $H = 0$ . Dans ces conditions,  $f : V \oplus H' \rightarrow W \oplus f(H')$  est un isomorphisme.

□

**Corollaire 3.8.** *Si  $m = 0$ , alors  $M \cong H_\lambda^n$  avec  $\lambda \in k$  ou  $M \cong K_0^n$ .*

*Démonstration.* En vertu du Lemme 3.7,  $M$  est isomorphe à une représentation de la forme  $E \begin{smallmatrix} \xrightarrow{1} \\ \xrightarrow{g} \end{smallmatrix} E$  ou  $E \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{1} \end{smallmatrix} E$ . Dans le premier cas, munissons  $E$  d'une structure d'un  $k[t]$ -module en posant  $t.x = g(x)$  pour  $x \in E$ . De plus,  $E$  est un  $k[t]$ -module indécomposable (sinon, on pourrait décomposer  $E$  en sous-espaces stables par  $g$ , ce qui contredirait le fait que  $M$  est indécomposable) et de type fini. Le théorème fondamental pour les modules sur un anneau principal [AL09, p.520] entraîne qu'il existe  $p \in k[t]$  irréductible tel que  $E \cong k[t]/\langle p^s \rangle$  pour un  $s$  quelconque. Puisque



**Figure 2** – Si  $m = 1$  et  $n = 2$ , alors  $M \cong \bar{P}^2$

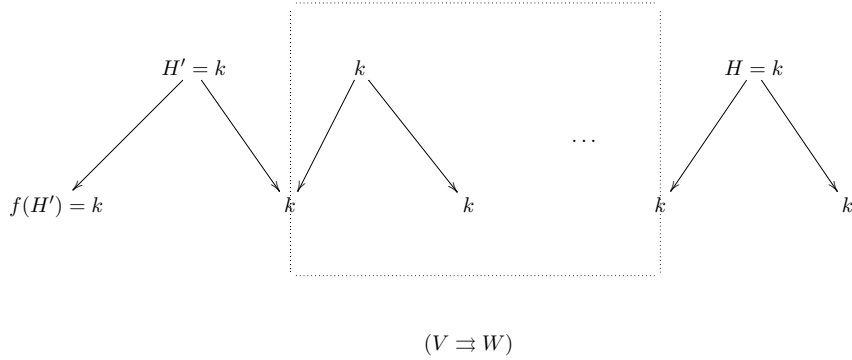
$k$  est algébriquement clos, on peut choisir une base appropriée de  $E$  telle que  $g$  puisse s'écrire dans la forme normale de Jordan comme un bloc  $J_n(\lambda)$  pour  $\lambda \in k$ . Ainsi,  $M \cong H_\lambda^n$ . De façon analogue, on démontre que si  $M = (E \xrightarrow[f]{1} E)$ , alors  $M \cong K_\lambda^n$ . Si  $\lambda \neq 0$ , alors  $J_n(\lambda)$  est inversible et donc  $f$  l'est aussi. Ainsi,  $M = (E \xrightarrow[f^{-1}]{1} E)$ , ce que nous ramène au premier cas.  $\square$

Deuxième cas Supposons que  $m = 1$ . On a alors que  $\dim E_2 = n$ ,  $\dim E_1 = n + 1$ ,  $\dim V = n - d - d' - 2$ ,  $\dim W = n - d - d' - 1$ ,  $\dim H = d + 1$  et  $\dim H' = d' + 1$ .

**Lemme 3.9.** *Si,  $m = 1$ , alors  $M \cong \bar{P}^n$ .*

*Démonstration.* Procédons par récurrence sur  $n$ . Si  $n = 1$ , et que  $f$  et  $g$  sont non nulles, on a que  $M \cong (K \xrightarrow[g]{f} K^2) = P(2) \cong \bar{P}^1$ . Supposons, maintenant, que  $n = 2$ , donc  $\dim V = n - d - d' - 2$  et, ainsi,  $d = d' = 0$  et  $V = 0$ . Alors,  $\dim W = \dim H = \dim H' = 1$ . La représentation  $M$  peut donc s'écrire sous la forme présentée dans la Figure 2. Ainsi,  $M \cong \bar{P}^2$ .

Finalement, supposons que  $n > 2$ . En vertu du Lemme 3.6,  $V \xrightarrow{\cong} W$  est indécomposable. Notons que cela entraîne immédiatement que les applications  $f$  et  $g$  sont non nulles. Par ailleurs, puisque  $\dim V > \dim W$  on a que  $V \xrightarrow{\cong} W$  n'est ni isomorphe à  $K_\lambda^n$  ni à  $H_\lambda^n$ , pour un  $\lambda$ . Soit  $t = \dim V = n - d - d' - 2$  et  $\dim W = t + 1$ . Puisque  $t < n$ , en vertu de l'hypothèse de récurrence, on a  $V \xrightarrow{\cong} W \cong \bar{P}^t$ . En particulier, chacune des restrictions  $f_V$  et  $g_V$  sont injectives. Par ailleurs, on sait que chacune de  $f : H' \cong f(H')$  et  $g : H \cong g(H)$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels de dimension 1. En outre,  $g(H') \neq 0$ , car sinon la représentation  $k \xrightarrow[0]{1} k$  serait un facteur direct de  $M$ . Puisque  $H'$  est de dimension 1, cela implique que  $g : H' \cong g(H')$  est un isomorphisme entre sous-espaces de dimension 1. De même,  $f : H \cong f(H)$  l'est aussi. Conséquemment,  $M$  peut s'écrire sous la forme présentée à la Figure 3.  $\square$



**Figure 3** – Si  $m = 1$  et  $n > 2$ , alors  $M \cong \bar{P}^n$

Troisième cas Considérons la situation où  $m \geq 2$ .

**Lemme 3.10.** *Si  $m \geq 2$ , alors  $M$  n'est plus une représentation indécomposable.*

*Démonstration.* On procède par récurrence sur  $n$ . Si  $n = 1$ ,

$$M \cong (k \begin{smallmatrix} f \\ \rightrightarrows \\ g \end{smallmatrix} k^3) \cong S(1) \oplus \bar{P}^1 .$$

Si  $n > 1$ , considérons la sous-représentation  $V \rightrightarrows W$ . Donc,  $\dim V = n - d - d' - 2m$  et  $\dim W = n - d - d' - m = m + \dim V$ . Par l'hypothèse de récurrence,  $V \rightrightarrows W$  est décomposable et, en vertu du Lemme 3.6,  $M$  est aussi décomposable.  $\square$

On a réussi à démontrer le Théorème de classification.

**Théorème 3.11** (Théorème de classification). *Soit  $M = (E_2 \rightrightarrows E_1)$  une représentation indécomposable de  $\mathbf{K}_2$ . Soit  $n = \dim E_2$ .*

- a) *Si  $n < \dim E_1$ , alors  $M \cong \bar{P}^n$*
- b) *Si  $n > \dim E_1$ , alors  $M \cong \bar{Q}^n$*
- c) *Si  $n = \dim E_1$ , alors  $M \cong H_\lambda^n$  où  $\lambda \in k$  ou  $M \cong K_0^n$*   $\square$

On réfère le lecteur à [Bur86] et [Rye13] : le premier a été l'inspiration principale de cet article et le dernier présente une preuve alternative à celle décrite ici, ainsi qu'une application de la décomposition des représentations de  $\mathbf{K}_2$  à la résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires  $Ax = B\dot{x}$ .

## Références

- [AL09] Ibrahim ASSEM et Pierre Yves LEDUC : *Cours d'algèbre : groupes, anneaux, modules et corps*. Presses internationales Polytechnique, Québec, 2009.
- [ARO97] Maurice AUSLANDER, Idun REITEN et Sverre O.SMALO : *Representation Theory of Artin Algebras*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [ASS06] Ibrahim ASSEM, Daniel SIMSON et Andrzej SKOWRONSKI : *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [Bur86] Pierre-François BURGERMEISTER : Classification des représentations de la double flèche. *L'Enseignement mathématique*, 32:199–210, 1986.
- [Die46] Jean DIEUDONNÉ : Sur la réduction canonique des couples de matrices. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 74:130–146, 1946.
- [Rye13] August Benjamin RYE : The 2-Kronecker Quiver and Systems of Linear Differential Equations. Mémoire de D.E.A., Norwegian University of Science and Technology, 2013.
- [Sch14] Ralf SCHIFFLER : *Quiver Representations*. Springer International Publishing, Suisse, 2014.

TANNA SÁNCHEZ MCMILLAN  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE  
Courriel: [tanna.sanchez@USherbrooke.ca](mailto:tanna.sanchez@USherbrooke.ca)