CaMUS **7**, 45 – 66

Polynômes à déviation minimale sur l'union de deux intervalles

Gabriel Dupuis

RÉSUMÉ Cet article étudie la proposition qui dresse une équivalence entre une classe de polynômes à déviation minimale sur une union d'intervalles et l'équation de Pell définie à partir de cette même union d'intervalles. Après avoir énoncé cette proposition, nous tenterons de comprendre puis de montrer cet énoncé à l'aide de problèmes résolus et résultats importants de la théorie des polynômes extrêmes. Nous verrons, entre autres, les polynômes de Tchebycheff, de Akhiezer et de Tchebycheff généralisés ainsi que le théorème général de Tchebycheff. Une fois la proposition comprise et montrée, nous allons voir une construction de polynômes à déviation minimale sur l'union de deux intervalles basée sur cette même proposition.

1 Introduction

Historiquement, P.L. Tchebycheff fut le premier à poser et résoudre des problèmes dans lesquels, étant donné un sous-ensemble fermé de la droite réelle et une fonction $f(x)$ continue sur ce sous-ensemble, le but est de trouver une fonction $g(x)$, parmi une famille de fonctions, qui minimise la norme supremum de la différence entre $f(x)$ et $g(x)$. Ces problèmes ont émergé de questionnements d'ingénierie où le but était de minimiser la friction dans les jointures du parallélogramme de Watt qui est la pièce de la machine à vapeur transformant le mouvement de va-et-vient en mouvement de rotation. Les recherches de Tchebycheff ont mené à une modification des liens du parallélogramme en question avec les autres pièces de la machine à vapeur, modifications encore utilisées à ce jour [Bog05]. C'est ensuite ses étudiants, E.I. Zolotarev puis N.I. Akhiezer qui ont pris la relève en posant et résolvant d'autres problèmes du même type. Aujourd'hui, les résultats obtenus en résolvant ces problèmes sont utilisés dans la théorie de l'approximation afin de répondre à des questions relatives au génie électrique.

Avant d'énoncer certains problèmes, la notion de déviation doit être introduite. Cette notion est une façon de mesurer à quel point deux fonctions sont près ou éloignées l'une de l'autre.

Ce travail a reçu le soutien de Mitacs dans le cadre de Bourse de formation à la recherche Mitacs. Aussi, j'aimerais remercier Mme Vasilisa Shramchenko, Professeure à l'Université de Sherbrooke, pour la supervision de mon stage de recherche et pour son aide tout au long de la rédaction de cet article.

Définition 1.1. La *déviation* d'une fonction continue $g(x)$ par rapport à une fonction continue $f(x)$ sur un sous-ensemble Θ, fini ou infini, fermé de la droite réelle est définie par la quantité :

$$\sup_{x \in \Theta} |f(x) - g(x)|.$$

La déviation s'avère être la norme suprémum de la fonction $f - g$ se trouvant dans l'espace des fonctions continues définies sur Θ.

Parmi les problèmes proposés par P.L. Tchebycheff, E.I. Zolotarev et N.I. Akhiezer, nous retrouvons les cinq problèmes de la théorie des polynômes extrêmes suivants.

Problème 1. Étant donné un intervalle fermé $[a,b]$ de la droite réelle et deux fonctions à valeurs réelles $f(x)$, $s(x)$ continues sur $[a,b]$ telles que $s(x) \neq 0$, $\forall x \in [a,b]$. Considérons l'expression :

$$Q(x) = s(x) \frac{q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \ldots + q_n}{p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_m} \tag{1}$$

où m et n sont donnés. Trouver les paramètres réels p_0, p_1, $\ldots$, p_m ; ainsi que q_0, q_1, $\ldots$, q_n qui sont tels que la déviation de $Q(x)$ par rapport à $f(x)$ soit minimale.

Problème 2. Trouver le polynôme monique de degré n dont la déviation par rapport à zéro sur l'intervalle $[-1, 1]$ est minimale parmi l'ensemble des polynômes moniques de degré n.

Problème 3. Étant donné un paramètre σ réel fixé, trouver le polynôme de degré n de la forme :

$$x^n - n\sigma x^{n-1} + q_0 x^{n-2} + \ldots + q_{n-2},$$

dont la déviation par rapport à zéro sur $[-1,1]$ est minimale parmi l'ensemble des polynômes de cette forme.

Problème 4. Trouver le polynôme monique de degré n dont la déviation par rapport à zéro sur les intervalles symétriques $[-1, -a] \cup [a, 1]$ est minimale parmi l'ensemble des polynômes moniques de degré n.

Problème 5. Étant donné $a,b \in \mathbb{R}$ tel que $-1 < a < b < 1$, trouver le polynôme monique de degré n dont la déviation par rapport à zéro sur les intervalles $[-1,a] \cup [b,1]$ est minimale parmi l'ensemble des polynômes moniques de degré n.

Suivant principalement les Problèmes 4 et 5, il vient naturellement un problème au cadre plus général encore.

Problème 6. Étant donné c_1, c_2, c_3, $c_4 \in \mathbb{R}$ tels que $c_4 < c_3 < c_2 < c_1$, trouver le polynôme monique de degré n dont la déviation par rapport à zéro sur les intervalles $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$ est minimale parmi l'ensemble des polynômes moniques de degré n.

Le but de cet article est de construire une formule explicite pour une famille de solutions du Problème 6. Pour définir cette famille et construire la formule explicite des polynômes qui la compose, nous allons étudier un lien étonnant entre une équation de Pell et certaines solutions du Problème 6. La proposition qui suit énonce ce lien.

Pour certaines constantes c_1, c_2, c_3, $c_4 \in \mathbb{R}$ qui satisfassent les inégalités $c_4 < c_3 < c_2 < c_1$, il existe $\hat{p}_n$ et $\hat{q}_{n-2}$, des polynômes à coefficients réels de degré n et $n-2$ respectivement, tel que l'équation de Pell :

$$\hat{p}_n^2(x) - \hat{\mathscr{P}}_4(x)\hat{q}_{n-2}^2(x) = 1, \tag{2}$$

où

$$\hat{\mathscr{P}}_4(x) = \prod_{j=1}^{4}(x - c_j),$$

est vérifiée. Nous notons $\hat{P}_n$ la solution du Problème 6 lorsque l'on considère les intervalles $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$ et L_n sa déviation sur cette union d'intervalles.

Proposition 1.2. *Soit c_1, c_2, c_3, $c_4 \in \mathbb{R}$ tels que $c_4 < c_3 < c_2 < c_1$ et soit $\hat{p}_n$, un polynôme à coefficients réels de degré n. Il existe $\hat{q}_{n-2}$, un polynôme à coefficients réels de degré $n-2$, tel que $\hat{p}_n$ et $\hat{q}_{n-2}$ vérifie l'équation de Pell (2) si et seulement si $\hat{P}_n$, la solution du Problème 6 pour les intervalles $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$, vérifie les deux conditions suivantes :*

1. *$\hat{p}_n(x) = \hat{P}_n(x)/\pm L_n$;*
2. *L'ensemble $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$ est le sous-ensemble maximal de $\mathbb{R}$ pour lequel $\hat{P}_n(x)$ est le polynôme monique de degré n déviant le moins de zéro.*

Dans la première section, il sera question d'un résultat important de la théorie des polynômes extrêmes, soit le théorème général de Tchebycheff (aussi appelé théorème d'alternance). Ce théorème découle directement de la recherche d'une solution au Problème 1 et nous verrons comment appliquer ce résultat aux Problèmes 2 et 3. Le travail effectué dans cette section servira de base à plusieurs raisonnements logiques des sections suivantes en plus de nous permettre de déduire une propriété importante du polynôme $\hat{P}_n$ de la Proposition 1.2.

Dans la seconde section nous discuterons de la maximalité des intervalles $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$ dont il est question au point 2. de l'énoncé de la Proposition 1.2. Cette discussion se fera à travers la recherche de solutions aux Problèmes 4 et 5. D'un côté, la recherche d'une solution au Problème 4 nous permettra de comprendre ce concept de maximalité des intervalles de façon générale. De l'autre, la recherche d'une solution au Problème 5 permettra de distinguer une famille de solutions particulière à ce problème, distinction qui sera étroitement liée à ce même concept de maximalité des intervalles.

Dans la quatrième section nous ferons la preuve de la Proposition 1.2 et poserons une définition de la famille de solutions vérifiant les conditions 1. et 2. de celle-ci. Il s'avèrera que cette famille de solutions sera étroitement liée à la famille trouvée au Problème 5. Ensuite, nous tenterons de construire une formule explicite pour cette famille de polynômes tout en dégageant les limites de cette même construction. Le fil logique de cette section sera guidé par des arguments utilisés dans les sections antérieures.

La dernière section conclura en donnant quelques résultats étroitement liés à la Proposition 1.2, résultats qui répondront à un questionnement qui n'aura été que brièvement abordé dans les Sections 3 et 4.

2 Théorème général de Tchebycheff

2.1 Théorème général de Tchebycheff et son corollaire

Le Problème 1 étant une généralisation des Problèmes 2, 3 et bien plus encore, il est difficile, voir impossible, d'en déterminer une solution générale. Toutefois, la recherche d'une solution à ce problème a donné lieu à la démonstration d'un théorème d'importance dans la théorie des polynômes extrêmes, soit le théorème général de Tchebycheff. Avant d'énoncer ce théorème, nous devons poser deux définitions donnant un nom aux points où la déviation d'une fonction par rapport à une autre atteint son maximum.

Définition 2.1. Soient deux fonctions continues $g(x)$ et $f(x)$ sur un sous-ensemble Θ fini ou infini fermé de la droite réelle. Un *point de déviation* est un point $x_0 \in \Theta$ tel que :

$$|f(x_0) - g(x_0)| = \sup_{x \in \Theta} |f(x) - g(x)|.$$

Définition 2.2. Soit deux fonctions continues $g(x)$ et $f(x)$ définies sur un sous-ensemble Θ fini ou infini fermé de la droite réelle. Un *ensemble de points d'alternance* est une suite finie croissante maximale de points de déviation sur laquelle le signe de $f(x) - g(x)$ alterne.

Par exemple, considérons $\Theta = [c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$, $f(x) = 0$ et $g(x)$ le polynôme illustré à la Figure 1. Les points de déviation sont c_4, c_3, c_2, c_1, y_1, y_2 et y_3. Il y a deux ensembles de points d'alternance, étant donnée la condition de maximalité de la définition, soit $\{c_4, y_1, y_2, y_3, c_3, c_1\}$ et $\{c_4, y_1, y_2, y_3, c_2, c_1\}$. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème général de Tchebycheff.

Théorème 2.3 (Théorème général de Tchebycheff)**.** *Soit un intervalle $[a,b]$ réel fermé et une fonction $f(x)$ continue sur cet intervalle. Parmi les fonctions de la forme (1), il existe une fonction $P(x)$ déviant le moins de la fonction $f(x)$ dans $[a,b]$. Les polynômes du numérateur et du dénominateur de $P(x)$ sont*

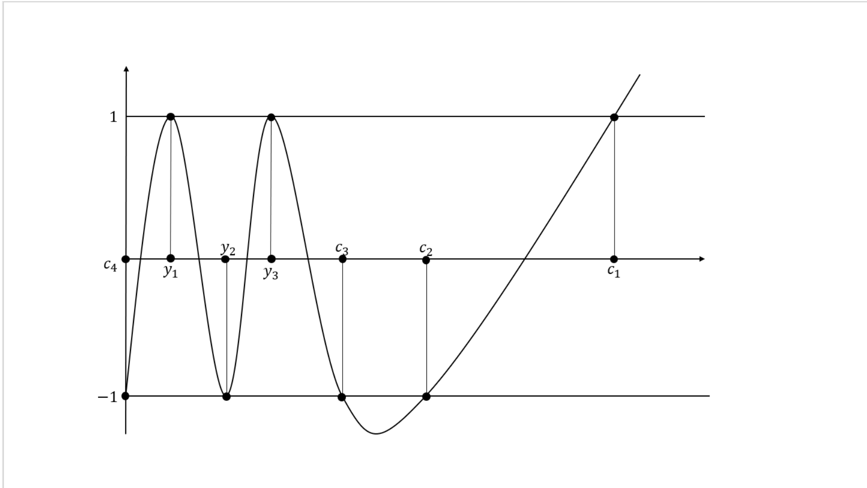

FIGURE 1 : Graphe de $\hat{p}_5(x)$ avec $(m_0,m_1) = (5,4)$.

uniquement déterminés si on suppose que la fraction est réduite. La fonction $P(x)$ est complètement caractérisée par la propriété suivante : si la fonction $P(x)$ s'exprime sous la forme :

$$P(x) = s(x)\frac{b_0x^{n-\nu} + \ldots + b_{n-\nu}}{a_0x^{m-\mu} + \ldots + a_{m-\mu}} = s(x)\frac{B(x)}{A(x)},$$

où $0 \leq \mu \leq m$, $0 \leq \nu \leq n$, $a_0 \neq 0$ et la fraction $\frac{B(x)}{A(x)}$ est irréductible, alors le nombre de points d'alternance dans $[a,b]$ est supérieur ou égal à $m + n + 2 - d$, où $d = \min\{\mu, \nu\}$.

Remarque 2.4. L'unicité et la caractérisation de $P(x)$ permettent d'obtenir l'équivalence suivante : étant donné $Q(x)$ de la forme (1), alors $Q(x) = P(x)$ si et seulement si pour le nombre de points d'alternance de $Q(x)$ par rapport à $f(x)$ sur $[a,b]$ est supérieur ou égal à $m + n + 2 - d$.
La preuve de cette équivalence se trouve à la fin de la preuve (du théorème général de Tchebycheff) à la section 34 du livre [Akh92].

Ce théorème s'adapte au cas particulier où la formule (1) représente un polynôme de degré n, adaptation qui servira tout au long de l'article étant donné que tous les problèmes que nous traitons sont polynomiaux.

Corollaire 2.5. *Soit $[a,b]$ un intervalle réel fermé et $f(x)$ une fonction continue sur cet intervalle. Si $s(x) = 1$ et $m = 0$ dans l'expression (1), alors le Problème 1 devient celui de chercher le polynôme de degré n dont la déviation sur $[a,b]$ par rapport à une fonction $f(x)$ est minimale parmi l'ensemble des polynômes de degré n. Dans ce contexte, le théorème général de Tchebycheff devient :*

Parmi l'ensemble des polynômes de degré n, il existe un unique polynôme $P(x)$ dont la déviation sur $[a,b]$ par rapport à $f(x)$ est minimale. Ce polynôme *se caractérise par le fait que le nombre de points d'alternance dans* $[a,b]$ *est supérieur ou égal à* $n+2$.

Remarque 2.6. L'unicité et la caractérisation du polynôme $P(x)$ nous permettent d'obtenir l'équivalence suivante : étant donné un polynôme $Q(x)$ de degré n, alors $Q(x) = P(x)$ si et seulement si le nombre de points d'alternance de $Q(x)$ par rapport à $f(x)$ sur $[a,b]$ est supérieur ou égal à $n+2$.

Remarque 2.7. Nous pouvons retrouver l'énoncé du Problème 1, la preuve du théorème général de Tchebycheff et l'énoncé du Corollaire 2.5 dans les sections 31 à 35 du livre [Akh92].

2.2 Application du théorème général de Tchebycheff aux Problèmes 2 et 3

Voyons ce que le théorème de Tchebycheff nous permet de déduire à propos des solutions aux Problèmes 2 et 3 qui consistent tous deux à déterminer un polynôme dont la déviation par rapport à zéro est minimale sur $[-1,1]$ parmi une certaine famille de polynômes. Dans le Problème 2, nous nous intéressons à la famille de polynômes de la forme :

$$x^n + q_0 x^{n-1} + \ldots + q_{n-1}, \quad q_0, \ldots, q_{n-1} \in \mathbb{R}$$

et nous cherchons les paramètres $q_0, \ldots, q_{n-1}$ minimisant la norme supremum de ce polynôme sur $[-1,1]$, c'est-à-dire :

$$\inf_{q_0,\ldots,q_{n-1}} \left(\sup_{[-1,1]} |x^n + q_0 x^{n-1} + \ldots + q_{n-1}| \right).$$

En posant $f(x) = x^n$ et $[a,b] = [-1,1]$, et en considérant les polynômes de degré $n-1$ dans l'énoncé du Corollaire 2.5, alors il existe un unique polynôme $P(x) = b_0 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}$ solution au Problème 1. De plus, $P(x)$ se caractérise par le fait qu'il y a au moins $(n-1)+2 = n+1$ points d'alternance dans $[-1,1]$. Par définition, $P(x)$ vérifie :

$$\sup_{x\in[-1,1]} |f(x) - P(x)| = \inf_{q_0,\ldots,q_{n-1}} \left(\sup_{x\in[-1,1]} |x^n - q_0 x^{n-1} - \ldots - q_{n-1}| \right).$$

Ainsi, $f(x) - P(x)$ est le polynôme monique de degré n déviant le moins de zéro sur $[-1,1]$ et se caractérise par le fait qu'il y a au moins $n+1$ points d'alternance dans cet intervalle. La Remarque 2.6 nous permet de reformuler en disant que $f(x) - P(x)$ est l'unique polynôme monique de degré n tel que le nombre de points d'alternance sur $[a,b]$ est supérieur ou égal à $n+1$.
Plus particulièrement, un point d'alternance dans $(-1,1)$ est un extrémum local, ce qui entraine qu'il y a au plus $n-1$ points d'alternance dans $(-1,1)$, comme $f(x) - P(x)$ est un polynôme de degré n. Par conséquent, il est évident que la solution $f(x) - P(x)$ du Problème 2 se caractérise par le fait qu'il y a exactement $n+1$ points d'alternance dans $[-1,1]$ dont $n-1$ points sont dans $(-1,1)$ et les deux autres sont en ± 1.

Définition 2.8. Les *polynômes de Tchebycheff*, notés $T_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), sont définis comme suit :

$$T_n(x) = \cos(n\varphi), \quad x = \cos(\varphi) \quad \text{et} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

$T_n(x)$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad T_0 = 1 \quad \text{et} \quad T_1 = x. \tag{4}$$

On appelle coefficient de déviation minimale, noté L_n, la quantité :

$$L_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2^{1-n} & n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}.$$

On remarque alors que $L_nT_n(x)$ est monique de degré n et possède exactement $n+1$ points d'alternance dans $[-1,1]$, points que nous notons :

$$x_k = \cos\left(\frac{(n-k)\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

La caractérisation de la solution du Problème 2 trouvée ci-haut nous permet de conclure que $L_nT_n(x)$ est la solution recherchée.

Nous pouvons trouver une caractérisation, similaire à celle du Problème 2, pour la solution du Problème 3 en posant $f(x) = x^n - n\sigma x^{n-1}$, $[a,b] = [-1,1]$ et en considérant les polynômes de degré $n-2$ dans l'énoncé du Corollaire 2.5. La solution $f(x) - P(x)$ du Problème 3 se caractérisera alors plutôt par le fait qu'elle possède exactement n points d'alternance dans $[-1,1]$ dont $n-2$ points sont dans $(-1,1)$ et les deux autres sont en ± 1. La solution du Problème 3 est appelée polynôme de Zolotarev, notée $z_n(x)$.

Remarque 2.9. Pour davantage de détails à propos des solutions aux Problèmes 2 et 3, voir la section 5 de l'article [VD18]. La démarche de la construction des polynômes de Tchebycheff à partir du théorème général de Tchebycheff se trouve à la section 36 du livre [Akh92]. À noter que la formule de la solution du Problème 3 utilise les fonctions elliptiques.

Les démarches effectuées ici nous montrent qu'étant donné le contexte du Problème 1, si nous trouvons une expression pour laquelle nous avons le bon nombre de points d'alternance, alors cette solution est la solution recherchée. Nous utiliserons cette idée régulièrement dans ce qui suit.

2.3 Généralisation du théorème général de Tchebycheff

La famille de polynômes parmi laquelle nous cherchons une solution au Problème 2, c'est-à-dire les polynômes de la forme :

$$x^n + q_0x^{n-1} + \ldots + q_{n-1}, \quad q_0, \ldots, q_{n-1} \in \mathbb{R},$$

est la même famille que celle parmi laquelle nous cherchons une solution aux Problèmes 4, 5 et 6. La seule différence entre ces problèmes est le sous-ensemble réel d'intérêt, c'est-à-dire respectivement $[-1,1]$, $[-1,-a]\cup[a,1]$, $[-1,a]\cup[b,1]$ et $[c_4,c_3]\cup[c_2,c_1]$. Il s'avère que le Corollaire 2.5 s'applique également aux problèmes posés sur l'union de deux intervalles et donc que la discussion ci-dessus concernant la solution du Problème 2 est également valide pour la solution respective des Problèmes 4, 5 et 6. Par conséquent, la solution du Problème 4 (resp. 5 et 6) existe et est l'unique polynôme monique de degré n admettant au moins $n+1$ points d'alternance sur $[-1,-a]\cup[a,1]$ (resp. $[-1,a]\cup[b,1]$ et $[c_4,c_3]\cup[c_2,c_1]$).

Ces dernières lignes nous donnent ainsi une propriété fondamentale de la solution du Problème 6 et, par conséquent, du polynôme $\hat{P}_n$ de la Proposition 1.2.

3 Maximalité des intervalles vue à travers les Problèmes 4 et 5

Nous avons déterminé une propriété intéressante du polynôme $\hat{P}_n$ de la Proposition 1.2, soit qu'il est l'unique polynôme monique de degré n admettant au moins $n+1$ points d'alternance sur $[c_4,c_3]\cup[c_2,c_1]$. Toutefois, $\hat{P}_n$ doit vérifier la condition 2. de la Proposition 1.2, c'est-à-dire celle concernant la maximalité des intervalles $[c_4,c_3]\cup[c_2,c_1]$. Cette condition peut potentiellement apporter des contraintes à propos de la disposition des points d'alternance dans $[c_4,c_3]\cup[c_2,c_1]$. Nous tenterons donc, dans la présente section, de mieux comprendre la signification de cette condition de maximalité à travers la recherche de solutions aux Problèmes 4 et 5.

3.1 Problème 4

La solution du Problème 4 est appelée polynôme de Akhiezer et se définit comme suit.

Définition 3.1. Le *polynôme de Akhiezer* de degré $n\in\mathbb{N}$, noté $A_n(x,a)$, est le polynôme de la forme :

$$A_n(x,a) = x^n + b_0x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}, \quad b_0,\ \ldots,\ b_{n-1}\in\mathbb{R}, \tag{5}$$

qui dévie le moins par rapport à zéro sur les intervalles égaux :

$$[-1,-a]\cup[a,1] \quad \text{avec} \quad a\in(0,1).$$

La déviation de $A_n(x,a)$ par rapport à zéro est noté $L_n(a)$.

Tel que discuté à la Section 2.3, $A_n(x,a)$ existe et est unique pour toutes valeurs de a. De plus, $A_n(x,a)$ est l'unique polynôme monique de degré n comptant au moins $n+1$ points d'alternance dans $[-1,-a]\cup[a,1]$. Aussi, de l'unicité et de la symétrie des intervalles, nous pouvons facilement déduire que pour n pair (resp. impair), $A_n(x,a)$ est paire (resp. impaire).

Étudions le cas particulier $n=2m-1$, $m\in\mathbb{N}_{>0}$. Dans ce cas, $A_{2m-1}(x,a)$ est l'unique polynôme monique de degré $2m-1$ comptant au moins $2m$ points d'alternance dans $[-1,-a]\cup[a,1]$. Nous avons vue que le polynôme de Tchebycheff $T_{2m-1}(x)$ possède les $2m$ points d'alternance sur $[-1,1]$:

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < 0 < x_m < \ldots < x_{2m-1},$$

où

$$x_k = \cos\left(\frac{((2m-1)-k)\pi}{(2m-1)}\right), \quad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, 2m-1.$$

Donc, si $a \leq x_m (= -x_{m-1})$ alors $A_{2m-1}(x,a) = L_{2m-1}T_{2m-1}(x)$, car les $2m$ points d'alternance de $L_{2m-1}T_{2m-1}(x)$ se retrouvent dans $[-1,-a]\cup[a,1]$. Toutefois, la formule de $A_{2m-1}(x,a)$ est beaucoup plus difficile à trouver pour $a > x_m$, comme $L_{2m-1}T_{2m-1}(x)$ n'a plus tous ses $2m$ points d'alternance dans $[-1,-a]\cup[a,1]$. Ainsi, la valeur $a = x_m$ est la « frontière » à partir de laquelle $L_{2m-1}T_{2m-1}$ n'est plus à déviation minimale sur $[-1,-a]\cup[a,1]$.

Ainsi, la discussion concernant $A_{2m-1}(x,a)$ nous fait rendre compte qu'un polynôme qui est la solution d'un problème tels les Problèmes 4, 5 et 6 peut potentiellement l'être pour une multitude d'unions de deux intervalles. De plus, cette même discussion nous montre qu'il y a des bornes, pour les unions de deux intervalles, à partir desquelles ce même polynôme n'est plus la solution. En effet, nous avons vu que $L_{2m-1}T_{2m-1}(x)$ est le polynôme monique de degré $2m-1$ dont la déviation sur l'intervalle $[-1,1]$ et les unions d'intervalles $[-1,-a]\cup[a,1]$, $a \in (0,x_m]$, est minimale parmi l'ensemble des polynômes monique de degré $2m-1$. Nous pouvons donc imaginer que lorsqu'il est question de maximalité de $[c_4,c_3]\cup[c_2,c_1]$ dans la Proposition 1.2 ceci signifie que $\hat{P}_n$ est à déviation minimale sur une multitude d'unions de deux intervalles et que l'union particulier d'intervalles $[c_4,c_3]\cup[c_2,c_1]$ en question est celle à partir de laquelle $\hat{P}_n$ n'est plus à la déviation minimale.

Remarque 3.2. Les formules explicites de $A_n(x,a)$ pour tous les n se trouvent à la section 52 du livre [Akh70]. Pour les comprendre, il faut connaître les fonctions elliptiques.

3.2 Problème 5

Étant donnée l'union d'intervalles :

$$[-1,a]\cup[b,1] \quad \text{avec} \quad -1 < a < b < 1,$$

la solution du Problème 5 est un polynôme de degré n de la forme :

$$M_n(x) = x^n + b_0x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}, \quad b_0,\, \ldots,\, b_{n-1} \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

tel que

$$\sup_{x\in[-1,a]\cup[b,1]} |M_n(x)| = \inf_{q_0,\,\ldots,\,q_{n-1}\in\mathbb{R}} \left(\sup_{x\in[-1,a]\cup[b,1]} \left|x^n + q_0x^{n-1} + \ldots + q_{n-1}\right|\right).$$

Tel que discuté à la Section 2.3, étant donnée l'union d'intervalles donnée par $[-1,a]\cup[b,1]$, il existe un unique polynôme $M_n(x)$ tel que décrit ci-haut. De plus, ce polynôme est le seul polynôme monique de degré n comptant au moins $n+1$ points d'alternance dans $[-1,a] \cup [b,1]$. Toutefois, il n'est pas garanti que $[-1,a] \cup [b,1]$ soit le sous-ensemble maximal de $\mathbb{R}$ sur lequel $M_n(x)$ est minimal. Examinons un cas particulier de solutions pour lesquelles la maximalité des intervalles est atteinte.

Définition 3.3. Un polynôme de la forme :

$$\mathscr{T}_n(x) = x^n + b_0 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}, \quad b_0, \ \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

est appelé *polynôme de Tchebycheff généralisé* (abrégé par T-polynôme) sur $[-1,a] \cup [b,1]$ s'il a exactement $n+2$ points de déviation dans $[-1,a] \cup [b,1]$, points notés :

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}.$$

Nous notons :

$$L_n = \sup_{x \in [-1,a] \cup [b,1]} |\mathscr{T}_n(x)|,$$

et disons que $\mathscr{T}_n(x)$ est un polynôme normalisé sur $[-1,a] \cup [b,1]$ si :

$$\mathscr{T}_n(x) = \mathscr{T}_n(x)/L_n.$$

Nous verrons en quoi la condition selon laquelle $\mathscr{T}_n(x)$ admet exactement $n+2$ points de déviation dans $[-1,a] \cup [b,1]$ assure que ce polynôme est solution du Problème 5. Nous verrons également le lien entre cette propriété et la maximalité des intervalles.

Proposition 3.4. $\mathscr{T}_n(x) = x^n + \ldots + b_0 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}$ *est un T-polynôme sur* $[-1,a] \cup [b,1]$ *si et seulement si* $\mathscr{T}_n(x)$ *possède exactement* $n-2$ *points intérieurs* $x_j \in (-1,a) \cup (b,1)$

$$x_1 < \ldots < x_i < a < b < x_{i+1} < \ldots < x_{n-2}$$

et les quatre points frontières ± 1, a *et* b *comme points de déviation où les suites de points d'alternance sont*

$$-1, x_1, \ \ldots, x_i, b, x_{i+1}, \ \ldots, x_{n-2}, 1$$

ou

$$-1, x_1, \ \ldots, x_i, a, x_{i+1}, \ \ldots, x_{n-2}, 1.$$

Démonstration. ($\Longleftarrow$) Direct par la définition de T-polynôme.
($\Longrightarrow$) Supposons que $\mathscr{T}_n(x)$ est un polynôme de Tchebycheff généralisé, alors $\mathscr{T}_n(x)$ admet exactement $n+2$ points de déviation sur $[-1,a] \cup [b,1]$. Ceci signifie qu'il y a soit $n-2$ points intérieurs et les quatre points frontières ou $n-1$ points intérieurs et trois des quatre points frontières qui sont des points de déviation. Or, ce dernier cas est impossible. En effet, si $n-1$ points intérieurs sont de déviation, alors $\mathscr{T}_n(x)$ compte $n-1$ extrémums locaux dans $(-1,a) \cup (b,1)$. De

plus, comme a et ou b est de déviation, il doit y avoir au moins un extrémum local dans $[a,b]$, ce qui signifie au moins n extrémums locaux pour un polynôme de degré n.

L'alternance des suites de points est facile à vérifier à l'aide d'arguments faisant intervenir le nombre d'extrémums locaux d'un polynôme de degré n.

□

Remarque 3.5. $\mathscr{T}_n(x)$ admet exactement un extrémum local dans (a,b) étant donné que a et b sont des points de déviation sans être tous deux des points d'alternance et que $n-2$ extrémums locaux se retrouvent dans $(-1,a) \cup (b,1)$.

La proposition précédente nous donne le nombre de points d'alternance, soit $n+1$, et la forme des ensembles de points d'alternance des polynômes de Tchebycheff généralisés sur $[-1,a] \cup [b,1]$. Ainsi, nous pouvons en conclure qu'un polynôme de Tchebycheff généralisé sur $[-1,a] \cup [b,1]$ est le polynôme monique de degré n dont la déviation est minimale sur $[-1,a] \cup [b,1]$ parmi l'ensemble des polynômes moniques de degré n. Le corollaire suivant formalise cette dernière conclusion.

Corollaire 3.6. *Soit* $\mathscr{T}_n(x) = x^n + \ldots + b_0 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}$ *un T-polynôme sur* $[-1,a] \cup [b,1]$ *avec les points de déviation :*

$$-1 < x_1 < \ldots < x_i < a < b < x_{i+1} < \ldots < x_{n-2} < 1$$

et les points d'alternance :

$$-1,\, x_1,\, \ldots,\, x_i,\, b,\, x_{i+1},\, \ldots,\, x_{n-2},\, 1$$

resp.

$$-1,\, x_1,\, \ldots,\, x_i,\, a,\, x_{i+1},\, \ldots,\, x_{n-2},\, 1.$$

Alors $\mathscr{T}_n(x)$ *est le polynôme monique de degré n dont la déviation par rapport à zéro sur* $[-1,\lambda] \cup [b,1]$ *où* $x_i \leq \lambda \leq a$ *(resp.* $[-1,a] \cup [\hat{\lambda},1]$ *où* $b \leq \hat{\lambda} \leq x_{i+1}$*) est minimale.*

Démonstration. Découle directement de la discussion à la Section 2.3, comme il y a au moins $n+1$ points d'alternance dans tous les cas proposés.

□

Remarque 3.7. La réciproque n'est pas vraie, c'est-à-dire qu'un polynôme monique de degré n dont la déviation par rapport à zéro dans $[-1,a] \cup [b,1]$ est minimale n'est pas nécessairement un T-polynôme sur $[-1,a] \cup [b,1]$. Par exemple, un T-polynôme sur $[-1,a] \cup [b,1]$ n'est pas un T-polynôme sur $[-1,\lambda] \cup [b,1]$ pour $x_i \leq \lambda < a$ comme ce polynôme ne compte que $n+1$ points de déviation (et d'alternance) dans $[-1,\lambda] \cup [b,1]$ et non $n+2$.

Ce corollaire nous montre donc que $[-1,a] \cup [b,1]$ est le sous-ensemble maximal de $\mathbb{R}$ sur lequel le polynôme de Tchebycheff généralisé sur $[-1,a] \cup [b,1]$ est solution du Problème 6. Nous pouvons donc voir la condition définissant les polynômes de Tchebycheff généralisés, soit avoir exactement $n+2$ points de déviation dans $[-1,a] \cup [b,1]$, comme étant une condition qui garantit la maximalité des intervalles $[-1,a] \cup [b,1]$. Également, dans le cas où cette condition est vérifiée, alors nous avons directement la forme des ensembles de points d'alternance. Cette condition reviendra potentiellement pour définir le polynôme $\hat{P}_n$ de la Proposition 1.2 de par son lien avec la maximalité des intervalles.

Remarque 3.8. L'ensemble des polynômes de Tchebycheff généralisés peut donc être perçu comme une famille de solutions du Problème 5. Également, lorsque nous étudions cette famille de polynômes en particulier, cela équivaut (intuitivement, car un T-polynôme est un T-polynôme que sur une unique union d'intervalles) à poser un critère sur les intervalles $[-1,a] \cup [b,1]$ à l'étude, critère qui se manifeste sous forme de formules pour a et b telles qu'énoncées à la section 5.3 de l'article [VD18].

4 Équation de Pell et Problème 6

Nous avons discuté du théorème général de Tchebycheff qui nous donnait une propriété intéressante que possède le polynôme $\hat{P}_n$ de la Proposition 1.2. Ensuite, nous avons discuté de la maximalité des intervalles dont il est question dans cette proposition et avons ainsi vu qu'elle est potentiellement en lien avec le nombre de points de déviation et la forme de l'ensemble de points d'alternance dans $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$. Reste à prouver la Proposition 1.2 afin d'avoir en main assez de propriétés concernant $\hat{P}_n$ pour en déduire une formule explicite.

4.1 Preuve de la Proposition 1.2 et propriété de $\hat{P}_n$

Étant donné l'union d'intervalles :

$$[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1] \quad \text{avec} \quad c_4 < c_3 < c_2 < c_1,$$

la solution du Problème 6 est un polynôme de degré n de la forme :

$$\hat{P}_n(x) = x^n + b_0 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}, \quad b_0,\ \ldots,\ b_{n-1} \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

tel que

$$\sup_{x\in[c_4,c_3]\cup[c_2,c_1]} |\hat{P}_n(x)| = \inf_{q_0,\ \ldots,\ q_{n-1}\in\mathbb{R}} \left(\sup_{x\in[c_4,c_3]\cup[c_2,c_1]} |x^n + q_0 x^{n-1} + \ldots + q_{n-1}| \right).$$

Notons L_n sa déviation sur $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$.

Tel que discuté à la Section 2.3, étant donnée l'union particulier d'intervalles $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$ il existe un unique polynôme $\hat{P}_n$ tel que décrit ci-haut. De plus, ce polynôme est le seul polynôme monique de degré n comptant au moins $n+1$ points d'alternance dans $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$. Toutefois, il n'est pas garanti que ce polynôme vérifie les conditions 1. et 2. de la Proposition 1.2. Ainsi, montrons la Proposition 1.2 pour ensuite déterminer la famille de solutions vérifiant les points 1. et 2. de celle-ci.

Démonstration. Soit c_1, c_2, c_3, $c_4 \in \mathbb{R}$ tels que $c_4 < c_3 < c_2 < c_1$.
($\Longrightarrow$) Supposons que nous avons $\hat{p}_n(x)$ et $\hat{q}_{n-2}(x)$ vérifiant l'équation de Pell (2) et vérifions 1. et 2.

L'équation de Pell nous permet de déduire deux choses. D'abord,

$$\hat{p}_n^2(x) - \hat{\mathscr{P}}_4(x)\hat{q}_{n-2}^2(x) = 1 \iff (\hat{p}_n(x) - 1)(\hat{p}_n(x) + 1) = \hat{\mathscr{P}}_4(x)\hat{q}_{n-2}^2(x).$$

Notons aussi que, $|\hat{p}_n(x)| = 1$, pour $x \in \{c_4,\, c_3,\, c_2,\, c_1\}$, comme $\{c_4,\, c_3,\, c_2,\, c_1\}$ sont les racines de $\hat{\mathscr{P}}_4(x)$. Ensuite,

$$\hat{\mathscr{P}}_4(x) < 0, \quad \forall x \in (c_4,c_3) \cup (c_2,c_1)$$

étant donnée que pour $x \in (c_4,c_3)$ nous avons $(x - c_4) > 0$ et $(x - c_i) < 0$, $i = 1$, 2, 3, et pour $x \in (c_2,c_1)$ nous avons $(x - c_i) > 0$, $i = 2$, 3, 4, et $(x - c_1) < 0$. De ces deux derniers constats, nous déduisons que :

$$(\hat{p}_n(x) - 1)(\hat{p}_n(x) + 1) = \hat{\mathscr{P}}_4(x)\hat{q}_{n-2}^2(x) \leq 0, \quad \forall x \in [c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \hat{p}_n^2(x) - 1 = (\hat{p}_n(x) - 1)(\hat{p}_n(x) + 1) \leq 0, \quad \forall x \in [c_4,c_3] \cup [c_2,c_1] \\
&\Longrightarrow \hat{p}_n^2(x) \leq 1, \quad \forall x \in [c_4,c_3] \cup [c_2,c_1] \\
&\Longrightarrow |\hat{p}_n(x)| \leq 1, \quad \forall x \in [c_4,c_3] \cup [c_2,c_1] \\
&\qquad \text{et } |\hat{p}_n(x)| \text{ atteint 1 sur ces intervalles au moins en } x \in \{c_4,\, c_3,\, c_2,\, c_1\} \\
&\Longrightarrow |\pm L_n \hat{p}_n(x)| \leq L_n, \quad \forall x \in [c_4,c_3] \cup [c_2,c_1].
\end{aligned}$$

Ainsi, $\pm L_n \hat{p}_n(x)$ est un polynôme dont la déviation dans $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$ est égale à la déviation de $\hat{P}_n(x)$ dans ces mêmes intervalles. Ce dernier constat jumelé à l'unicité de $\hat{P}_n(x)$ permet d'affirmer l'égalité en 1., c'est-à-dire

$$\hat{p}_n(x) = \hat{P}_n(x) / \pm L_n.$$

Pour montrer 2., remarquons d'abord que :

$$\hat{\mathscr{P}}_4(x) > 0, \quad \forall x \in ([c_4,c_3] \cup [c_2,c_1])^c$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow (\hat{p}_n(x) - 1)(\hat{p}_n(x) + 1) = \hat{\mathscr{P}}_4(x)\hat{q}_{n-2}^2(x) \geq 0, \quad \forall x \in ([c_4,c_3] \cup [c_2,c_1])^c \\
&\Longrightarrow \hat{p}_n^2(x) - 1 = (\hat{p}_n(x) - 1)(\hat{p}_n(x) + 1) \geq 0, \quad \forall x \in ([c_4,c_3] \cup [c_2,c_1])^c \\
&\Longrightarrow \hat{p}_n^2(x) \geq 1, \quad \forall x \in ([c_4,c_3] \cup [c_2,c_1])^c \\
&\Longrightarrow |\hat{p}_n(x)| \geq 1, \quad \forall x \in ([c_4,c_3] \cup [c_2,c_1])^c
\end{aligned}$$

l'égalité ne tenant que pour les zéros de $\hat{q}_{n-2}$ qui sont dans $([c_4,c_3] \cup [c_2,c_1])^c$, donc que pour un nombre fini de points. Ainsi, $\forall x \in ([c_4,c_3] \cup [c_2,c_1])^c$, le point 1. et la dernière implication permettent d'affirmer que $|\hat{P}_n(x)| \geq L_n$, donc que $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$ est le sous-ensemble maximal de $\mathbb{R}$ sur lequel $\hat{P}_n$ est à déviation minimale.

($\Longleftarrow$) Supposons maintenant que $\hat{P}_n$ vérifie les points 1. et 2. et montrons que $\hat{p}_n(x)$ vérifie l'équation de Pell.

Le point 2. permet d'affirmer que $\hat{P}_n(x) = \pm L_n$ pour $x \in \{c_4,\, c_3,\, c_2,\, c_1\}$, car autrement ceci signifierait que $|\hat{P}_n| \leq |L_n|$ sur un intervalle plus large, ce qui constitue une contradiction.

Ensuite, le point 1. et le fait que $\hat{P}_n(x) = \pm L_n$ pour $x \in \{c_4,\, c_3,\, c_2,\, c_1\}$ permettent d'affirmer que :

$$\hat{p}_n(x) = \pm 1, \text{ pour } x \in \{c_4,\, c_3,\, c_2,\, c_1\}$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \hat{p}_n^2(x) = 1, \text{ pour } x \in \{c_4,\, c_3,\, c_2,\, c_1\}\\
&\Longrightarrow \hat{p}_n^2(x) - 1 = 0, \text{ pour } x \in \{c_4,\, c_3,\, c_2,\, c_1\}\\
&\Longrightarrow \exists \hat{q}_{n-2}(x) \text{ t.q. } \hat{p}_n^2(x) - 1 = \hat{\mathscr{P}}_4(x)\hat{q}_{n-2}^2(x)\\
&\Longrightarrow \exists \hat{q}_{n-2}(x) \text{ t.q. } \hat{p}_n^2(x) - \hat{\mathscr{P}}_4(x)\hat{q}_{n-2}^2(x) = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\hat{p}_n(x)$ vérifie l'équation de Pell (2).

□

Comment pouvons-nous distinguer la famille de solutions du Problème 6 vérifiant les conditions 1. et 2. de la Proposition 1.2? La proposition qui suit nous montre que cette famille de solutions est fortement similaire à la famille des polynômes de Tchebycheff généralisés.

Proposition 4.1. *Soit $\hat{P}_n$ polynôme monique de degré n à déviation minimale sur $[c_4{,}c_3] \cup [c_2{,}c_1] \subset \mathbb{R}$. Alors $\hat{P}_n$ vérifie les points 1. et 2. de la Proposition 1.2 si et seulement s'il y a exactement $n+2$ points de déviation dans $[c_4{,}c_3] \cup [c_2{,}c_1]$. Ces $n+2$ points sont $n-2$ points intérieurs $y_i \in (c_4{,}c_3) \cup (c_2{,}c_1)$, $i = 1, \ldots, n-2$ et les quatre points frontières c_4, c_3, c_2 et c_1 :*

$$c_4 < y_1 < \ldots < y_i < c_3 < c_2 < y_{i+1} < \ldots < y_{n-2} < c_1.$$

Les ensembles de points d'alternance sont alors soit

$$c_4,\, y_1,\, \ldots,\, y_i,\, c_2,\, y_{i+1},\, \ldots,\, y_{n-2},\, c_1$$

ou

$$c_4,\, y_1,\, \ldots,\, y_i,\, c_3,\, y_{i+1},\, \ldots,\, y_{n-2},\, c_1.$$

Démonstration. ($\Longleftarrow$) En posant :

$$\hat{q}_{n-2}(x) = (x - y_1)\cdots(x - y_i)(x - y_{i+1})\cdots(x - y_{n-2})$$

nous avons que l'Équation de Pell (2) est vérifiée pour $\hat{p}_n = \hat{P}_n / \pm L_n$. Ainsi, $\hat{P}_n$ vérifie les points 1. et 2.

($\Longrightarrow$) Soit $\hat{P}_n$ le polynôme monique de degré n à déviation minimale sur l'union d'intervalle $[c_4{,}c_3] \cup [c_2{,}c_1]$ et supposons qu'il vérifie les conditions 1. et 2. de la

Proposition 1.2. Alors $\hat{p}_n = \hat{P}_n / \pm L_n$ est tel qu'il existe $\hat{q}_{n-2}$, un polynôme de degré $n-2$, pour lequel l'Équation (2) est vérifiée d'après la Proposition 1.2.

D'abord, $\hat{P}_n$ est solution du Problème 6 donc il y au moins $n+1$ points d'alternance dans $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$. Ensuite, l'Équation (2) se réécrit :

$$\hat{p}_n^2(x) - \hat{\mathscr{P}}_4(x)\hat{q}_{n-2}^2(x) = 1 \iff (\hat{p}_n(x)-1)(\hat{p}_n(x)+1) = \hat{\mathscr{P}}_4(x)\hat{q}_{n-2}^2(x),$$

alors $|\hat{p}_n(x)| = 1$ en au plus $n+2$ points, soit en c_1, c_2, c_3, c_4 et en des racines de $\hat{q}_{n-2}$. Par conséquent, du point 1. nous avons que $\hat{P}_n$ compte au plus $n+2$ points de déviation dans $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$, soit c_1, c_2, c_3, c_4 et les racines de $\hat{q}_{n-2}$ se retrouvant dans $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$. Du point 2. nous avons que $|\hat{P}_n(x)| > |L_n|$ en $x \to c_3^+$ et $x \to c_2^-$. Nous distinguons alors trois cas possibles en ce qui concerne le nombre de points de déviation et d'alternance dans $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$.

Cas 1 : il y a $n+2$ points de déviation et $n+2$ points d'alternance dans $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$. Les points de déviation de $\hat{P}_n$ dans $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$ sont les $n-2$ racines de $\hat{q}_{n-2}$ et les quatre points frontières.

Cas 2 : il y a $n+1$ points de déviation et $n+1$ points d'alternance dans $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$. Les points de déviation de $\hat{P}_n$ dans $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$ sont $n-3$ racines de $\hat{q}_{n-2}$ et les quatre points frontières.

Or pour les cas 1 et 2), c_3 et c_2 étant des points d'alternance et $|\hat{P}_n(x)| > |L_n|$ en $x \to c_3^+$ et $x \to c_2^-$, implique que $|\hat{P}_n(x)| = |L_n|$ en au moins deux points dans $[c_3,c_2]$. Par conséquent, $\hat{q}_{n-2}$ doit posséder au moins deux racines dans $[c_3,c_2]$, ce qui est impossible comme ses $n-2$ racines (resp. n - 3 racines) sont dans $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$.

Cas 3 : il y a $n+2$ points de déviation et $n+1$ points d'alternance dans $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$. Dans ce cas, seul le cas où $n-2$ points intérieurs et trois des quatre points frontières sont des points d'alternance ne mène pas à une contradiction, d'où l'énoncé.

□

Ainsi, étant donnée une union de deux intervalles $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$ et un degré n, il existe un unique polynôme monique $\hat{P}_n$ dont la déviation par rapport à zéro sur $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$ est minimale parmi l'ensemble des polynômes moniques de degré n. Toutefois, $\hat{P}_n$ ne vérifie pas nécessairement les conditions 1. et 2. de la Proposition 1.2 pour cette union de deux intervalles. La dernière proposition permet de dire que $\hat{P}_n$ vérifie la Proposition 1.2 si et seulement si $\hat{P}_n$ admet exactement $n+2$ points de déviation dans $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$. Nous pouvons donc définir les solutions du Problème 6 vérifiant les conditions 1. et 2. de la Proposition 1.2 à l'aide de la proposition ci-haute, définition qui serait substantiellement la même que celle des polynômes de Tchebycheff généralisés.

Remarque 4.2. À la manière des polynômes de Tchebycheff généralisés, nous pouvons donc imaginer qu'étudier les polynômes à déviation minimale vérifiant les conditions 1. et 2. de la Proposition 1.2 équivaut à poser un critère sur les intervalles $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$ à l'étude, critère prenant la forme de formules sur les bornes des intervalles. Nous discuterons de ceci à la Section 5.

4.2 Exemples explicites de solutions au Problème 6

Dans cette Section, le but est de construire une formule explicite pour les polynômes $\hat{P}_n$ vérifiant les conditions 1. et 2. de la Proposition 1.2. Ainsi, soit l'union d'intervalles $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$ tel que la solution du Problème 6, notée $\hat{P}_n$, vérifie les conditions 1. et 2. de la Proposition 1.2. Nous chercherons à déterminer la formule de $\hat{p}_n = \hat{P}_n / \pm L_n$ où L_n est la déviation de $\hat{P}_n$ sur $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$.

D'après la Proposition 4.1, nous pouvons considérer les points de déviation de $\hat{P}_n$:

$$c_4 < y_1 < \ldots < y_i < c_3 < c_2 < y_{i+1} < \ldots < y_{n-2} < c_1$$

et la suite de points d'alternance

$$c_4,\, y_1,\, \ldots,\, y_i,\, c_3,\, y_{i+1},\, \ldots,\, y_{n-2},\, c_1.$$

Notons ensuite :

- $m_0 + 1$, le nombre de points d'alternance sur $[c_4,c_1]$;
- $m_1 + 1$, le nombre de points d'alternance sur $[c_4,c_3]$;
- $\tau_1 = m_0 - m_1 - 1$, le nombre de points d'alternance sur (c_2,c_1) ;
- $\tau_2 = m_1 - 1$, le nombre de points d'alternance sur (c_4,c_3).

Notons que $m_0 = n$ et $m_1 < m_0$. D'après la formule (3.6) de l'article [VD18], il s'avère que m_0 et m_1 vérifient l'égalité suivante :

$$n \int_{c_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\hat{\mathscr{P}}_4(x)}} dx = m_1 \int_{c_3}^{c_2} \frac{1}{\sqrt{\hat{\mathscr{P}}_4(x)}} dx$$

entrainant alors que $(m_0,m_1) = (n,m_1)$ correspond aux « winding numbers » d'une trajectoire de billard elliptique n-périodique dans une ellipse définie à partir de c_3 et de c_2 ou c_1 et de caustique défini par c_3, c_2 et c_1. Ceci nous permet de déduire que m_1 est pair d'après des arguments avancés dans ce même article.

4.2.1 Construction de $\hat{p}_3(x)$

Soit $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$ une union d'intervalles pour laquelle le polynôme $\hat{p}_3$ vérifie l'Équation (2). Alors $0 < m_1 < m_0 = 3$ et le fait que m_1 est pair donne que $m_1 = 2$ d'où :

- $m_0 + 1 = 4$;
- $m_1 + 1 = 3$;
- $\tau_1 = m_0 - m_1 - 1 = 0$;
- $\tau_2 = m_1 - 1 = 1$.

D'après les valeurs de τ_1 et τ_2, nous pouvons poser la suite des points de déviation :

$$c_4 < y_1 < c_3 < c_2 < c_1,$$

avec la suite de points d'alternance :

$$c_4,\, y_1,\, c_3,\, c_1.$$

Partant de ces propriétés, nous tentons de déterminer la formule explicite de $\hat{p}_3$. Sans perte de généralité (car $\hat{p}_3 = \hat{P}_3 / \pm L_3$), supposons que $\hat{p}_3(c_4) = -1$. Alors, à partir de la suite de points d'alternance, nous trouvons les valeurs : $\hat{p}_3(c_4) = \hat{p}_3(c_3) = \hat{p}_3(c_2) = -1$ et $\hat{p}_3(y_1) = \hat{p}_3(c_1) = 1$. La Figure 2 illustre $\hat{p}_3$ construit à partir de ces égalités.

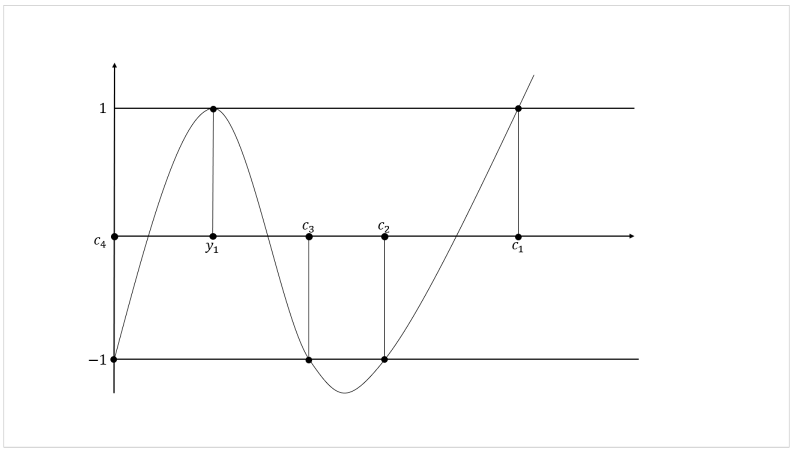

FIGURE 2 : Graphe de $\hat{p}_3(x)$.

Il reste à déterminer la formule de $\hat{p}_3$. Comme c'est un polynôme de degré 3 qui doit vérifier les égalités précédentes, $\hat{p}_3$ prend la forme :

$$\hat{p}_3(x) = kr(x) - 1,$$

où $r(x) = (x-c_4)(x-c_3)(x-c_2)$ et k est tel que $kr(y_1) = 2$ (ce qui est équivalent à $k = \frac{2}{r(y_1)}$). Ainsi,

$$\hat{p}_3(x) = 2\frac{r(x)}{r(y_1)} - 1.$$

Comme y_1 est un extrémum local, pour le déterminer il suffit de déterminer la racine de $r'(x)$ qui se trouve dans $[c_4,c_3]$ (la racine restante se trouvant dans (c_3,c_2)). Donc il suffit de résoudre une équation de degré 2. Pour obtenir l'expression de $\hat{P}_3$ il suffit de diviser $\hat{p}_3$ par son coefficient directeur.

Finalement, remarquons que c_1 doit être la première valeur x suivant c_2 telle que $r(x) = r(y_1)$, donc que c_1 doit être une certaine fonction de c_4, c_3 et c_2. Donc dans le cas $n = 3$, nous pouvons définir la famille d'intervalles de la forme $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$ pour laquelle le polynôme $\hat{p}_3$ vérifie l'équation de Pell comme étant l'ensemble des intervalles de la forme $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$ où $c_4 < c_3 < c_2 \in \mathbb{R}$ et $c_1 \in \mathbb{R}$ est la première valeur $x > c_2$ tel que $\hat{p}_3(x) = 1$.

4.2.2 Construction de $\hat{p}_4(x)$

Soit $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$ une union d'intervalles pour lesquels le polynôme $\hat{p}_4$ vérifie l'équation (2). Alors $0 < m_1 < m_0 = 4$ et m_1 pair donne que $m_1 = 2$ d'où :

- $m_0 + 1 = 5$;
- $m_1 + 1 = 3$;
- $\tau_1 = m_0 - m_1 - 1 = 1$;
- $\tau_2 = m_1 - 1 = 1$.

D'après les valeurs de τ_1 et τ_2, nous pouvons poser la suite des points de déviation :

$$c_4 < y_1 < c_3 < c_2 < y_2 < c_1,$$

avec la suite de points d'alternance :

$$c_4,\, y_1,\, c_3,\, y_2,\, c_1.$$

Partant de ces propriétés, nous tentons de déterminer la formule explicite de $\hat{p}_4$. Sans perte de généralité (car $\hat{p}_4 = \hat{P}_4 / \pm L_4$), supposons que $\hat{p}_4(c_4) = -1$. Alors, à partir de la suite de points d'alternance, nous trouvons les valeurs : $\hat{p}_4(c_4) = \hat{p}_4(c_3) = \hat{p}_4(c_2) = \hat{p}_4(c_1) = -1$ et $\hat{p}_4(y_1) = \hat{p}_4(y_2) = 1$. La Figure 3 illustre $\hat{p}_4$ construit à partir de ces égalités.

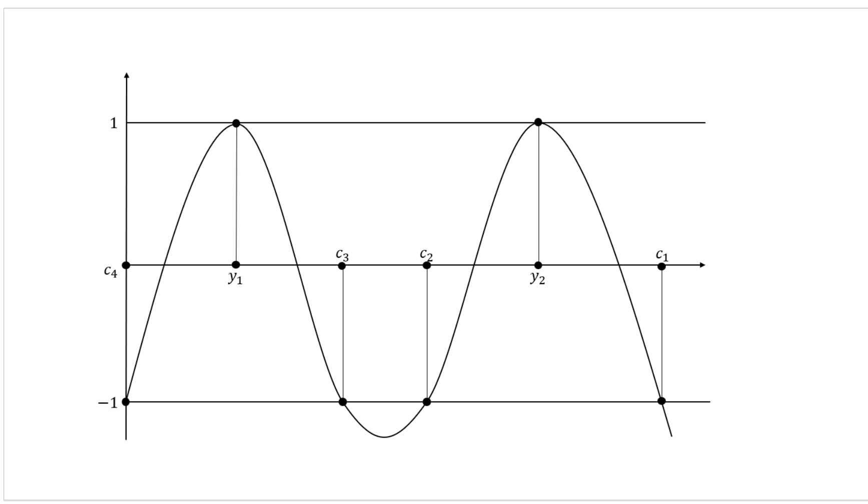

FIGURE 3 : Graphe de $\hat{p}_4(x)$.

Il reste à déterminer la formule de $\hat{p}_4$. Comme c'est un polynôme de degré 4 qui doit vérifier les égalités précédentes, $\hat{p}_4$ prend la forme :

$$\hat{p}_4(x) = kr(x) - 1,$$

où $r(x) = (x - c_4)(x - c_3)(x - c_2)(x - c_1)$ et k est tel que $kr(y_1) = 2$ (ce qui revient à $k = \frac{2}{r(y_1)}$). Ainsi,

$$\hat{p}_4(x) = 2\frac{r(x)}{r(y_1)} - 1.$$

Comme y_1 et y_2 sont des extrémums locaux, pour les déterminer il faut déterminer les racines de $r'(x)$ qui se trouvent dans $[c_4,c_3]$ et $[c_2,c_1]$ respectivement (la racine restante se trouvant dans (c_3,c_2)). Donc il faut ici résoudre une équation de degré 3. Pour obtenir l'expression de $\hat{P}_4$ il suffit de diviser $\hat{p}_4$ par son coefficient directeur.

4.2.3 Construction de $\hat{p}_5(x)$

Soit $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$ une union d'intervalles pour laquelle le polynôme $\hat{p}_5$ vérifie l'Équation (2). Alors $0 < m_1 < m_0 = 5$ et m_1 pair donne que $m_1 = 2$ ou $m_1 = 4$. Pour $m_1 = 2$:

- $m_0 + 1 = 6$;
- $m_1 + 1 = 3$;
- $\tau_1 = m_0 - m_1 - 1 = 2$;
- $\tau_2 = m_1 - 1 = 1$.

D'après les valeurs de τ_1 et τ_2, nous pouvons poser la suite de points de déviation :

$$c_4 < y_1 < c_3 < c_2 < y_2 < y_3 < c_1,$$

avec la suite de points d'alternance :

$$c_4,\ y_1,\ c_3,\ y_2,\ y_3,\ c_1.$$

Partant de ces propriétés, nous tentons de déterminer la formule explicite de $\hat{p}_5$. Sans perte de généralité (car $\hat{p}_5 = \hat{P}_5 / \pm L_5$), supposons que $\hat{p}_5(c_4) = -1$. Alors, à partir de la suite de points d'alternance, nous trouvons les valeurs : $\hat{p}_5(c_4) = \hat{p}_5(c_3) = \hat{p}_5(c_2) = \hat{p}_5(y_3) = -1$ et $\hat{p}_5(y_1) = \hat{p}_5(y_2) = \hat{p}_5(c_1) = 1$. La Figure 4 illustre $\hat{p}_4$ construit à partir de ces égalités.

Il reste à déterminer la formule de $\hat{p}_5$ avec $(m_0,m_1) = (5,2)$. Comme $\hat{p}_5$ est un polynôme de degré 5 qui doit vérifier les égalités précédentes, $\hat{p}_5$ prend la forme :

$$\hat{p}_5(x) = kr(x) - 1,$$

où $r(x) = (x - c_4)^h(x - c_3)^i(x - c_2)^j(x - y_3)^l$, avec $\{h,\ i,\ j,\ l\} = \{1,\ 1,\ 1,\ 2\}$ et k est tel que $kr(y_1) = 2$ (ce qui revient à $k = \frac{2}{r(y_1)}$). Ainsi,

$$\hat{p}_5(x) = 2\frac{r(x)}{r(y_1)} - 1.$$

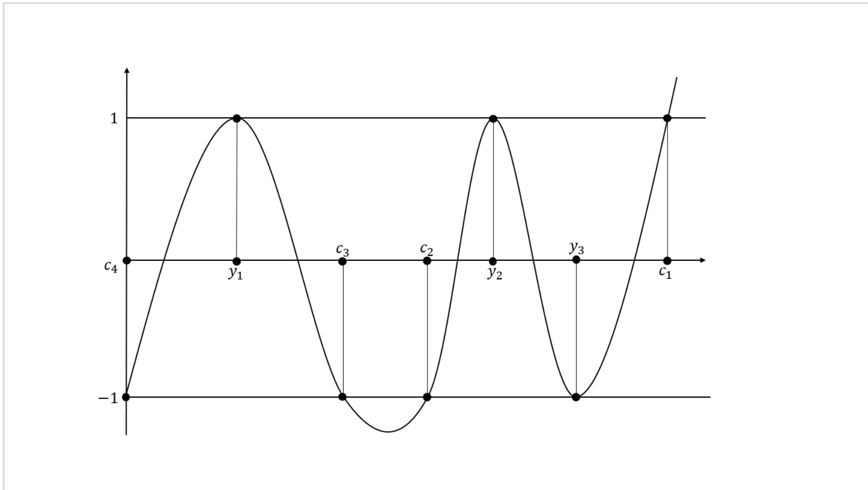

FIGURE 4 : Graphe de $\hat{p}_5(x)$ avec $(m_0,m_1) = (5,2)$.

De l'équation de Pell, $(\hat{p}_5(x) - 1)(\hat{p}_5(x) + 1) = \hat{\mathscr{P}}_4(x)\hat{q}^2_{n-2}(x)$, il est évident que $h = i = j = 1$ et $l = 2$ dans l'expression de $r(x)$. Comme y_1, y_2 et y_3 sont des extrémums locaux, pour les déterminer il faut déterminer la racine de $r'(x)$ qui se trouve dans $[c_4,c_3]$ et les deux se trouvant dans $[c_2,c_1]$ (la racine restante se trouvant dans (c_3,c_2)). Le degré de $r'(x)$ est égal à 4 et nous voyons ainsi qu'il devient de plus en plus difficile de trouver les racines que nous devons trouver pour notre construction. En réalité, le degré de $r'(x)$ augmente de 1 à chaque fois que nous augmentons de 1 la valeur de n. Également, le fait que y_3, c'est-à-dire un point dans $(c_4,c_3) \cup (c_2,c_1)$, serve à définir $r(x)$ augmentera potentiellement la difficulté dans la recherche des valeurs de y_1, y_2 et y_3. Pour $m_1 = 4$:

- $m_0 + 1 = 6$;
- $m_1 + 1 = 5$;
- $\tau_1 = m_0 - m_1 - 1 = 0$;
- $\tau_2 = m_1 - 1 = 3$.

D'après les valeurs de τ_1 et τ_2, nous pouvons poser la suite de points de déviation :

$$c_4 < y_1 < y_2 < y_3 < c_3 < c_2 < c_1,$$

avec la suite de points d'alternance :

$$c_4,\, y_1,\, y_2,\, y_3,\, c_3,\, c_1.$$

Partant de ces propriétés, nous tentons de déterminer la formule explicite de $\hat{p}_5$. Sans perte de généralité (car $\hat{p}_5 = \hat{P}_5 / \pm L_5$), supposons que $\hat{p}_5(c_4) = -1$. Alors, à partir de la suite de points d'alternance, nous trouvons les valeurs :

$\hat{p}_5(c_4) = \hat{p}_5(c_3) = \hat{p}_5(c_2) = \hat{p}_5(y_2) = -1$ et $\hat{p}_5(y_1) = \hat{p}_5(y_3) = \hat{p}_5(c_1) = 1$. La Figure 1 illustre $\hat{p}_4$ construit à partir de ces égalités.

Il reste à déterminer la formule de $\hat{p}_5$ avec $(m_0,m_1) = (5,4)$. Comme $\hat{p}_5$ est un polynôme de degré 5 qui doit vérifier les égalités précédentes, $\hat{p}_5$ prend la forme :

$$\hat{p}_5(x) = kr(x) - 1,$$

où $r(x) = (x - c_4)(x - c_3)(x - c_2)(x - y_2)^2$ et k est tel que $kr(y_1) = 2$ (ce qui revient à $k = \frac{2}{r(y_1)}$). Ainsi,

$$\hat{p}_5(x) = 2\frac{r(x)}{r(y_1)} - 1.$$

La même problématique pour déterminer y_1, y_2 et y_3 que pour $(m_0, m_1) = (5, 2)$ se pose ici.

5 Conclusion

Ainsi, nous avons une construction pour les polynômes $\hat{p}_n$ avec $n = 3$, $n = 4$ et presque pour $n \geq 5$ (comme nous n'arrivons pas à déterminer y_1, y_2 et y_3 pour ce dernier cas) vérifiant l'équation de Pell :

$$\hat{p}_n^2(x) - \hat{\mathscr{P}}_4(x)\hat{q}_{n-2}^2(x) = 1,$$

où

$$\hat{\mathscr{P}}_4(x) = \prod_{j=1}^{4}(x - c_j).$$

Toutefois, cette construction suppose le fait que l'union d'intervalles $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$ posée est connue et est tel que $\hat{p}_n$ vérifie l'Équation (2), or il est difficile de déterminer une telle union d'intervalles. Pour $\hat{p}_3(x)$ il est possible de fixer c_4, c_3, c_2 puis poser c_1 comme étant la première valeur $x > c_2$ telle que $r(x) = r(y_1)$ et nous avons alors que la construction trouvée fonctionne. Par contre, une telle astuce ne fonctionne pas pour $\hat{p}_4$.

Le questionnement à savoir si étant donnée l'union d'intervalles $[c_4,c_3]\cup[c_2,c_1]$ il existe un polynôme à déviation minimale vérifiant les conditions 1. et 2. de la Proposition 1.2 est abordée dans l'article de V. Dragovic et M. Radnovic [VD18]. L'approche utilisée pour déterminer les formules de c_1 en fonction de c_2, c_3 et c_4 pour les différents degrés n est celle du billard elliptique et des courbes elliptiques.

Une fois les formules de c_1 déterminées, une transformation affine liant les polynômes à déviation minimale de degré n sur $[c_4,c_3] \cup [c_2,c_1]$ aux polynômes de Tchebycheff généralisés sur $[-1,a] \cup [b,1]$ est donnée dans ce même article.

Références

[Akh70] N.I. Akhiezer : *Elements of the Theory of Elliptic Functions.* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1970.

[Akh92] N.I. Akhiezer : *Theory of Approximation.* Dover publications, INC., New York, New York, 1992.

[Bog05] Andrei Bogatyrev : *Extremal Polynomials and Riemann Surfaces.* Springer, Moscou, Russie, 2005.

[VD18] M. Radnovic V. Dragovic : Caustics of poncelet polygons and classical extremal polynomials. *arXiv :1812.02907v1 [math.DS]*, 2018.

Gabriel Dupuis
Département de mathématiques, Université de Sherbrooke
Courriel: `Gabriel.Dupuis2@USherbrooke.ca`